理工学研究科　博士課程前期課程・博士課程後期課程

研究科	専攻	課程	科目名	入試方式	年度	ページ
理工学	数学	博士前期	専門科目（微分積分、線形代数、集合・位相）	学内選考入学試験（自学科生対象）	2026	1
理工学	数学	博士前期	外国語（英語）	一般入学試験（夏季）	2026	3
理工学	数学	博士前期	専門科目（数学）	一般入学試験（夏季）	2026	5
理工学	数学	博士前期	外国語（英語）	一般入学試験（春季）	2026	10
理工学	数学	博士前期	専門科目（数学）	一般入学試験（春季）	2026	11

1問につき1枚の解答用紙を使用すること。

以下の問題**1**，**2**，**3**のすべてに解答せよ.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ を 2 次正方行列とする．ただし，a, b, c を実数定数とする．実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす実ベクトル空間 $M_2(\mathbb{R})$ の部分集合

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : A \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} A \right\}$$

と $M_2(\mathbb{R})$ の実線形変換

$$F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \longmapsto B \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) V は $M_2(\mathbb{R})$ の実線形部分空間であることを示せ.

(2) 実ベクトル空間 V の基底を1組求めよ．また，$\dim V$ を求めよ.

(3) $F(V) \subset V$ が成り立つための a, b, c の条件を求めよ.

(4) (3) で求めた a, b, c の条件の下で，F の V への制限を $f : V \to V$ と表すとき，(2) で求めた V の基底に関する f の表現行列 C を，a, b, c の全部あるいは一部を用いて表示せよ.

2. p を実数定数とする.

(1) $-\infty \leq a < b \leq \infty$ とする．$\mathbb{R}$ の区間 (a, b) で定義された関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ がある関数 $f(x)$ に一様収束することの定義を述べよ.

(2) $f_n(x) = n^p x e^{-nx^2}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき，関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ の $\mathbb{R}$ における各点収束の意味での極限関数 $f(x)$ を求めよ.

(3) (2) の関数列が $\mathbb{R}$ において一様収束するための p に関する必要十分条件を求めよ.

2026年4月・2025年9月入学　大学院学内選考入学試験問題

理工学研究科　前期課程　数学専攻

専門科目

（注）問題番号または記号を必ず解答用紙に明記すること

3. つぎの問題に答えよ.

$\sharp X$ は集合 X の濃度を表す.

(1) A と B は $\mathbb{R}$ の部分集合とし，$A \cap B = \emptyset$ かつ $\sharp A = \sharp B = \sharp\mathbb{Q}$ を満たすとする．このとき，$\sharp(A \cup B) = \sharp\mathbb{Q}$ が成り立つことを示せ.

(2) 単射 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ をひとつ構成せよ.

(3) $\sharp(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \sharp\mathbb{R}$ を示せ.

距離空間 (X, d) の点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対し，X の部分集合 X_n $(n \in \mathbb{N})$ および X_∞ を $X_n = \mathrm{Cl}\{x_k \mid k \geq n\}$, $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ により定める．ただし，Cl は部分集合の閉包を表す.

(4) (X, d) が実数直線 $\mathbb{R}$ に通常の距離を与えたものである場合に X_∞ が空集合となるような実数列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ の例をあげよ.

(5) (X, d) がコンパクト距離空間である場合，X の任意の点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ は集積点を持つことを示せ.

2026年4月・2025年9月入学 大学院夏季入学試験問題

理工学研究科 前期課程 数学専攻

英　　　語

- 問題は，E-1, E-2 の 2 問があります．すべてに解答しなさい。
- 解答は必ず解答用紙に記入しなさい。
- 解答用紙には，受験番号と氏名を，忘れずに，明確に，記入しなさい。

E-1 以下は，D. Fearnley-Sander による論文（Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 86, No. 10, pp. 809–817 (December 1979)）からの抜粋である．ただし一部に改変を施してある．この文章について以下の問に答えよ．

引用文

※著作権法により掲載できません

(1) 下線部 (ア) を和訳せよ．ただし，人名は原文表記のままでよい．

(2) 下線部 (イ) を和訳せよ．ただし，人名は原文表記のままでよい．

E-2 以下の問に答えよ．

(1) 次の文章を英訳せよ．

ベクトル空間 V の部分集合 S が与えられたとき，有限個の S の元の一次結合全体の集合を S により生成される部分空間と呼ぶ．

(2) 次の問題の $\boxed{\qquad\qquad}$ の部分に正しい数式を入れて，全体を英訳せよ．

$\sin x$ の原点におけるテーラー展開は

$$\boxed{\qquad\qquad}$$

だから，$x = 1$ を代入することにより，$\sin 1$ の近似値は $0.84\cdots$ となることがわかる．

(3) 次の文章を和訳せよ．

A topological space X is said to be path connected if for any two points $x, y \in X$, there exists a continuous map

$$f : [0,1] \to X$$

such that

$$f(0) = x \quad \text{and} \quad f(1) = y.$$

The map f is called a path from x to y.

2026年4月・2025年9月入学 大学院夏季入学試験問題

理工学研究科 前期課程 数学専攻

数 学

- A 群の問題 3 問，A-1，A-2，A-3 と，B 群の問題 7 問，B-1，B-2，$\cdots$，B-7 があります。A 群の中から 2 問，B 群の中から 2 問の計 4 問を選択して解答しなさい。
- 解答は必ず解答用紙に記入しなさい。
- 解答用紙に，選択した問題の番号を明記しなさい。
- 解答用紙には，受験番号と氏名を，忘れずに，明確に，記入しなさい。

A-1 a, b を実数とする．このとき，行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 1 \\ b & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ 1 & 1 & b & a \end{pmatrix}$$

により定まる線形変換

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4; \qquad \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有多項式と固有値を求めよ．

(2) 行列 A を直交行列により対角化せよ．

(3) 線形変換 T の核と像，それぞれの次元を求めよ．

A-2 以下の問に答えよ．

(1) $n = 1, 2, \ldots$ を固定する．関数

$$f(t) = e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

を原点のまわりでテーラー展開をすることにより，$t > 0$ の関数

$$\phi(t) := \frac{1}{t^2}\left\{e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\right\}$$

は単調増加であることを示せ．

(2) (1) の $\phi(t)$ と $n = 1, 2, \ldots$ に対する次の不等式を示せ．

$$e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq t^2 \phi(1)$$

(3) $x \in (0, 1]$ に対して，関数 $g(x)$ を $g(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ によって定める．次の広義積分を求めよ．

$$\int_0^1 g(x)\,dx$$

(4) $(0, 1]$ 上の関数列

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

は関数 $g(x)$ に一様収束するかどうかを調べよ．

(5) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n\,dx$$

A-3 距離空間 (X, d) において，空でない閉集合 A_n $(n \in \mathbb{N})$ が

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$$

を満たすとし，$A = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $X = \mathbb{R}$ の場合に，$A = \emptyset$ となる A_n $(n \in \mathbb{N})$ の例を与えよ．ただし $\mathbb{R}$ には通常の距離を与えるものとする．

(2) (X, d) がコンパクトならば $A \neq \emptyset$ であることを示せ．

(3) (X, d) がコンパクトと仮定し，正数 ε に対して $N_\varepsilon = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}$ とおく．ただし $x \in X$ に対し $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$ である．このとき，任意の正数 ε に対して $A_n \subset N_\varepsilon$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ が存在することを示せ．

(4) (X, d) がコンパクトでなく，かつ $A \neq \emptyset$ と仮定し，正数 ε に対して N_ε を (3) の通りとする．このときは，必ずしも $A_n \subset N_\varepsilon$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ が存在するとは限らない．そのような (X, d) および A_n $(n \in \mathbb{N})$ の例を与えよ．

B-1 整数 $n > 0$ に対し $G(n) := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ を剰余環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の乗法群とする．以下の問に答えよ．

(1) $G(25)$ と $G(66)$ の位数を求めよ．

(2) $G(25)$ における 7 の類の位数を求めよ．

(3) $G(25)$ が巡回群かどうか理由とともに答えよ．

(4) $G(25)$ と $G(66)$ が同型かどうか理由とともに答えよ．

B-2 K を体とし，$f(x) \in K[x]$ を定数でない多項式とする．以下の問に答えよ．

(1) $f(x) = x^2 + bx + c$ $(b, c \in K)$ の場合に，次の同値性を証明せよ．

$$f(x) \text{ は } \overline{K} \text{ において重根を持つ} \iff b^2 = 4c$$

ただし，$\overline{K}$ は K の代数閉包を表す．

(2) $f(x)$ が K において重根をもてば，剰余環 $R := K[x]/(f(x))$ は 0 でないべき零元をもつことを証明せよ．

(3) $K = \mathbb{Q}$，$f(x) = x^3 - 7x^2 + (c+6)x - c$ の場合に，$f(x)$ が $\mathbb{Q}$ において重根をもつような定数 $c \in \mathbb{Q}$ の値をすべて求めよ．さらに，求めた c のそれぞれの場合に，剰余環 $R = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$ の 0 でないべき零元を一つずつ求め，その元 (剰余類) を代表する多項式を一つずつ挙げよ．

B-3 $u=(u^1,u^2)\in\mathbb{R}^2$ のノルムを $\|u\|:=\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}$ と定める．C^∞ 級写像

$$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad u=(u^1,u^2)\mapsto\left(\frac{2u^1}{\|u\|^2+1},\frac{2u^2}{\|u\|^2+1},\frac{\|u\|^2-1}{\|u\|^2+1}\right)$$

でパラメータ表示される座標曲面 $M=\varphi(\mathbb{R}^2)$ について，以下の問に答えよ．

(1) 像 $M=\varphi(\mathbb{R}^2)$ を求めよ．

(2) M の第 1 基本量 $g=\big(g_{ij}(u)\big)$ を求めよ．

(3) M の第 2 基本量 $h=\big(h_{ij}(u)\big)$ を求めよ．

(4) M の Gauss 曲率 $K=K(u)$，および平均曲率 $H=H(u)$ を計算せよ．

(5) M の面積 $\mathrm{Area}(M)$ は，

$$\mathrm{Area}(M)=\int_{\mathbb{R}^2}\sqrt{\det\big(g_{ij}(u)\big)}\,du^1du^2$$

で与えられることを示せ．また $\mathrm{Area}(M)$ の値を求めよ．ここで，$\det\big(g_{ij}(u)\big)$ は $\big(g_{ij}(u)\big)$ の行列式を表す．

B-4 $\mathbb{R}^3$ の 3 つの部分空間

$$A=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,x_3\geqq 0\},$$
$$B=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1^2+x_2^2\leqq 1,x_3=0\},$$
$$C=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,x_3\leqq 0\}$$

をとり，$W=\{A,B,C\}$ の空でない部分集合 S に対して $X(S)=\bigcup_{V\in S}V$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $S=\{A\}$，$\{A,B\}$，$\{A,B,C\}$ に対し，$X(S)$ のホモロジー群 $H_*(X(S);\mathbb{Z})$ とオイラー数 $\chi(X(S))$ を求めよ．

(2) 7 つの S に対する $X(S)$ を位相同型なもの同士に分類し，それを説明せよ．

(3) 7 つの S に対する $X(S)$ の中に単連結でないものは存在するか判定し，存在する場合はその基本群を求め，存在しない場合には単連結である理由を説明せよ．

B-5 以下の問に答えよ．

(1) $[0,\infty)$ におけるルベーグ測度 dx に関して，関数列 $\{f_n\}$ に対する単調収束定理を記述せよ．

(2) $0 \le x \le 1$，$n = 1, 2, \ldots$ のとき，次の不等式を示せ．

$$n \sin \frac{x}{n} \le (n+1) \sin \frac{x}{n+1}$$

(3) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^\infty e^{e^{-t}} \sin \frac{1}{ne^t}\, dt$$

B-6 ξ を 0 以下の実数とする．以下の問に答えよ．

(1) z を複素変数とする複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(1+z^2)^2}$$

によって定める．$f(z)$ の極を求め，各々の極における留数を求めよ．

(2) 上半平面における曲線 $C_R^{(+)}$ を中心が原点で半径 $R > 1$ の半円周とし，I_R を実軸上の区間 $[-R, R]$ とする．ただし，閉曲線 $C_R^{(+)} \cup I_R$ には反時計回りの向きを入れる．$R \to \infty$ とすることにより，次の広義積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(1+x^2)^2}\, dx$$

B-7 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立で，$k = 1, 2, \ldots, n$ に対し X_k の従う分布の確率密度関数が

$$f_{X_k}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k\theta} \exp\left(-\dfrac{x}{k\theta}\right), & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

で与えられるとする．ここで $\theta > 0$ は未知のパラメータとする．以下の問に答えよ．

(1) θ の最尤推定量 $\widehat{\theta}$ を求めよ．

(2) 最尤推定量 $\widehat{\theta}$ は不偏性を持つことを示せ．

(3) 最尤推定量 $\widehat{\theta}$ の分散を求め，$\widehat{\theta}$ は一致推定量であることを示せ．

2026年度　大学院春季入学試験問題

理工学研究科　前期課程　数学専攻

英　語

- 問題は，E-1, E-2 の 2 問があります．すべてに解答しなさい。
- 解答は必ず解答用紙に記入しなさい。
- 解答用紙には，受験番号と氏名を，忘れずに，明確に，記入しなさい。

E-1　以下は，Laura Rodríguez による論文 (Frigyes Riesz and the emergence of general topology: The roots of 'topological space' in geometry, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 69, pp. 55–102 (2015)) の Introduction からの抜粋である．この文章について以下の問に答えよ．

引用文

※著作権法により掲載できません

(1) 下線部 (ア) を和訳せよ．ただし，人名および記号は原文表記のままでよい．

(2) 下線部 (イ) を和訳せよ．ただし，人名および記号は原文表記のままでよい．

E-2　次の文章を英訳せよ．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在し，すべての自然数 $n > N$ に対して $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つことである．

(2) n 次元線形空間 V において，$n+1$ 個の元 $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ は必ず線形従属である．

(3) 位相空間において弧状連結集合は連結集合であるが，その逆は成り立たない．

(4) 2 つの事象 A, B が独立であるとは，$P(A)P(B) = P(A \cap B)$ が成り立つことである．

2026年度　大学院春季入学試験問題

理工学研究科　前期課程　数学専攻

数　　学

- A 群の問題 3 問，A-1，A-2，A-3 と，B 群の問題 7 問，B-1，B-2，$\cdots$，B-7 があります。A 群の中から 2 問，B 群の中から 2 問の計 4 問を選択して解答しなさい。
- 解答は必ず解答用紙に記入しなさい。
- 解答用紙に，選択した問題の番号を明記しなさい。
- 解答用紙には，受験番号と氏名を，忘れずに，明確に，記入しなさい。

A-1 すべての非負整数 n に対して

$$a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0 \quad (n \geq 0) \tag{$\star$}$$

を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 全体の集合を

$$V = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mid \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ が } (\star) \text{ を満たす } \}$$

とおく．V は成分ごとの和とスカラー倍で実線形空間となる．また，V 上の線形写像 $\varphi : V \to V$ を

$$\varphi\big(\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\big) = \{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$$

で定める．さらに，数列 $u^{(i)} = \{u_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty} \in V$ $(i = 1, 2, 3)$ をそれぞれ

$$(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}) = (1, 0, 0), \quad (u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}) = (0, 1, 0), \quad (u_0^{(3)}, u_1^{(3)}, u_2^{(3)}) = (0, 0, 1)$$

を満たす唯一の V の元として定める．以下の問に答えよ．

(1) $\{u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}\}$ は V の基底であることを示せ．

(2) 基底 $\big(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}\big)$ に関する線形写像 $\varphi : V \to V$ の表現行列 A を求めよ．

(3) (2) で求めた行列 A の固有値・固有ベクトルおよび $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ．

(4) 任意の $n \geq 0$ に対する一般項 a_n を a_0, a_1, a_2 と n の式で具体的な係数まで明示的に表せ．

A-2 関数 $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \begin{cases} -x \log x & (0 < x \leq 1), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定める．以下の問に答えよ．

(1) 次の級数は $[0,1]$ 上で一様収束することを証明せよ．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g(x)^n$$

(2) 次の関係式を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 x^{-x}\, dx$$

A-3 X, Y を位相空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする．以下の問に答えよ．

(1) X の部分集合 A がコンパクトならば，像 $f(A)$ もコンパクトであることを示せ．

(2) X の部分集合 B が弧状連結ならば，像 $f(B)$ も弧状連結であることを示せ．

以下では $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ にユークリッド距離を与え，写像 $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を，$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対し $p(x,y) := x$ として定める．

(3) $\mathbb{R}^2$ の任意の開集合 U に対し，像 $p(U)$ は $\mathbb{R}$ の開集合であることを示せ．

(4) $\mathbb{R}^2$ の空でない閉集合 C で，像 $p(C)$ が $\mathbb{R}$ の有界な開集合になるものの例を一つ与えよ．

B-1 G を群, $G \times G$ をその直積群とする．また，写像 $f: G \to G$ のグラフを $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in G \times G \mid x \in G\}$ と書く．次を示せ．

(1) 写像 $f: G \to G$ に対し，次の条件は同値である．

(a) f は準同型.

(b) Γ_f は $G \times G$ の部分群.

(2) 次の条件は同値である．

(a) G は可換群.

(b) 任意の準同型 $f: G \to G$ に対し Γ_f は $G \times G$ の正規部分群.

(c) 恒等写像 $\mathrm{id}_G: G \to G$ に対し Γ_{id_G} は $G \times G$ の正規部分群.

(3) (2) の条件が成り立つとき，任意の準同型 $f: G \to G$ に対し剰余群 $G \times G/\Gamma_f$ は G と同型である．

B-2 $\zeta_7 \in \mathbb{C}$ を 1 の原始 7 乗根とし，$L = \mathbb{Q}(\zeta_7)$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) ζ_7 の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．既約性についても論じること．

(2) $L/\mathbb{Q}$ はガロア拡大，かつ巡回拡大であることを示せ．

(3) L の部分体 $K := \mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^{-1})$ について，拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

(4) $\zeta_7 + \zeta_7^{-1}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．

B-3 曲面のパラメータ表示 $\varphi : U := \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$u = (u^1, u^2) \mapsto \left(\sqrt{(u^1)^2+1}\,\cos u^2,\ \sqrt{(u^1)^2+1}\,\sin u^2,\ \sinh^{-1}(u^1)\right)$$

で定まる座標曲面 $S := \varphi(U)$ について，以下の問に答えよ．ここで，$y = \sinh^{-1} x$ は $y = \sinh x$ の逆関数を表す.

(1) S の第 1 基本量 $g(u) = \left(g_{ij}(u)\right)$ を求めよ．

(2) S の単位法ベクトル場 $\nu(u)$ を求めよ．

(3) S の第 2 基本量 $h(u) = \left(h_{ij}(u)\right)$ を求めよ．

(4) S のガウス曲率 $K(u)$，および平均曲率 $H(u)$ を計算せよ．

B-4 標準的 4-単体 $\Delta^4 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^5 \mid \sum_{i=0}^{4} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ (i = 0, 1, 2, 3, 4)\}$ を標準的に単体的複体とみたとき，その k-骨格 ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) を $\Delta^4[k]$ と表す．Δ^4 および $\Delta^4[k]$ は単体的複体およびその多面体も表すこととする．以下ではホモロジー群は単体的複体のホモロジー群もしくは特異ホモロジー群のどちらと解釈しても構わない．また双方を混用しても構わない．以下の問に答えよ．

(1) Δ^4 は可縮であることを示せ．

(2) $k = 0, 1, 2, 3, 4$ に対し，$\Delta^4[k]$ のオイラー数を求めよ．

(3) $\Delta^4[k]$ が連結かつ単連結となる k を求めよ．

(4) $\Delta^4[2]$ の整数係数ホモロジー群を求めよ．

B-5 以下の問に答えよ．

(1) $[0,\infty)$ 上の可測関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対する単調収束定理を述べよ．

(2) 自然数 n と $x \geq 0$ に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

(3) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \frac{e^{-x}}{x+1}\,dx$$

B-6 $a \geq 1$ かつ $c > 0$ とする．複素平面における直線 $\mathrm{Re}\,(z) = c$ 上の線積分を

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^z}{z(z+1)}\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{c-iR}^{c+iR}\frac{a^z}{z(z+1)}\,dz$$

により定める．次の問に答えよ．

(1) 複素関数 $\dfrac{a^z}{z(z+1)}$ のすべての極と留数を求めよ．

(2) $R > c+2$ とする．$S(R)$ を $c-iR$ から $c+iR$ へ至る線分とし，$C(R)$ を中心が c，半径が R の半円周で線分 $S(R)$ の左側にあるとする．$C(R)$ には $c+iR$ から $c-iR$ へ至るように向きを備える．このとき，次の線積分を計算せよ．

$$\int_{S(R)\cup C(R)}\frac{a^z}{z(z+1)}\,dz$$

(3) $C(R)$ を (2) の半円周とする．このとき，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C(R)}\frac{a^z}{z(z+1)}\,dz = 0$$

が成り立つことを示せ．

(4) 線積分 $\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^z}{z(z+1)}\,dz$ の値を求めよ．

B-7 μ と $\sigma > 0$ を定数とし，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を互いに独立で同じ正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ にしたがう無作為標本とする．すなわち $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

で与えられる．次の問に答えよ．

(1) X_1 のモーメント母関数（積率母関数）$M_{X_1}(t)$ を求めよ．

(2) 分散が $\sigma^2 = 1$ のとき，母平均 μ の最尤推定量 $S = S(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を求めよ．

(3) (2) の最尤推定量 S のモーメント母関数 $M_S(t)$ を求めよ．