団代数 と 傾理論

東京大学 数理科学研究科
伊山 修

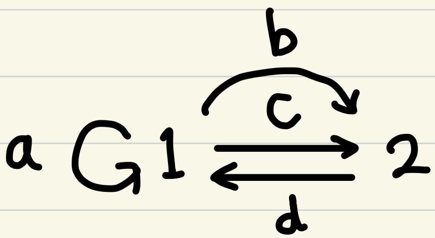
§1 Quiver

Def quiver（箙）とは 4つ組 $Q=(Q_0, Q_1, s, t)$ で
Q_0, Q_1 は（有限）集合，s, t は写像 $Q_1 \longrightarrow Q_0$

$\boxed{\text{quiver} = \text{有向グラフ}}$　Q_0：点の集合．Q_1：矢の集合

$a \in Q_1$ を矢 $\underset{\text{source}}{s(a)} \longrightarrow \underset{\text{target}}{t(a)}$ とみなす

Ex



$Q_0 = \{1, 2\}$

$Q_1 = \{a, b, c, d\}$

	a	b	c	d
s	1	1	1	2
t	1	2	2	1

Def Qの道とは，矢の列 $p = a_1 a_2 \cdots a_\ell$ で $s(a_{i-1}) = t(a_i)$ $(1 < i \leq \ell)$
をみたすもの　（$s(p) := s(a_\ell)$，$t(p) := t(a_1)$）

各 $i \in Q_0$ も長さ0の道 e_i とみなす

<u>Ex</u> $Q = [1 \xrightarrow{a_1} 2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} n]$

Qの道は $e_{ij} := a_{i-1} \cdots a_{j+1} a_j \ (1 \leq j \leq i \leq n)$ の $\binom{n+1}{2}$ 個

<u>Def</u> Qの道代数 $\mathbb{C}Q$ とは、Qの道を基底とする $\mathbb{C}$ベクトル空間に、道の結合により積を入れてえられる $\mathbb{C}$代数

$$p \cdot q := \begin{cases} pq & s(p) = t(q) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

<u>性質</u>
- $e_i \ (i \in Q_0)$ は直交巾等元 $e_i e_j = \begin{cases} e_i & i = j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
- $\sum_{i \in Q_0} e_i = 1_{\mathbb{C}Q}$
- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}Q < \infty \Leftrightarrow Q$: acyclic $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ e_i 以外にサイクル ($s(p) = t(p)$ を満たす path) を持たない

Ex 上の Q に対し、 $\mathbb{C}Q = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & & & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} & \cdots & \mathbb{C} \end{bmatrix}$

$e_{ij} \mapsto E_{ij}$ ((i,j) 成分 1, 他は 0)

$\boxed{\text{(右)} \mathbb{C}Q \text{加群} = Q^{op} \text{の表現}}$

$$\left(\begin{array}{c} \mathbb{C}Q\text{加群 } X \\ \text{を与える} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} \text{各 } i \in Q_0 \text{ に } \mathbb{C}\text{ベクトル空間 } X_i \text{ を与え、} \\ \text{各 } (a: i \to j) \text{ に線形写像 } X_a : X_j \to X_i \text{ を与える} \end{array}\right)$$

- $\mathbb{C}Q$ 加群 X に対し、

  $(X_i := Xe_i,\ X_a := (\cdot a) : Xe_j \longrightarrow Xe_i)$ は Q^{op} の表現

- Q^{op} の表現 $(X_i, X_a)_{i \in Q_0, a \in Q_1}$ に対し、

  $X := \bigoplus_{i \in Q_0} X_i$ は自然に $\mathbb{C}Q$ 加群となる

$\mathbb{C}Q$加群 $X = (X_i, X_a)_{i\in Q_0,\, a\in Q_1}$ に対し

$\underline{\dim} X := (\dim_{\mathbb{C}} X_i)_{i\in Q_0} \in \mathbb{Z}^n$ 次元ベクトル

$\underline{\text{Ex}}$ $Q = [1 \xrightarrow{a} 2]$ $\mathbb{C}Q = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{bmatrix}$

- $\mathbb{C}Q$の行 $[\mathbb{C}\ 0]$, $[\mathbb{C}\ \mathbb{C}]$ および $[0\ \mathbb{C}] := [\mathbb{C}\ \mathbb{C}]/[\mathbb{C}\ 0]$ は $\mathbb{C}Q$加群

$$\begin{array}{cccc} [\mathbb{C}\ 0] & [\mathbb{C}\ \mathbb{C}] & [0\ \mathbb{C}] & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ [\mathbb{C} \xleftarrow{0} 0] & [\mathbb{C} \xleftarrow{1} \mathbb{C}] & [0 \xleftarrow{0} \mathbb{C}] & : Q^{op}\text{の表現} \end{array}$$

次元ベクトル $(1,0)$ $(1,1)$ $(0,1)$

- $\mathbb{C}Q$加群 X で $\underline{\dim} X = (d_1, d_2)$ なるものは、線形写像 $\mathbb{C}^{d_1} \xleftarrow{X_a} \mathbb{C}^{d_2}$

つまり $d_1 \times d_2$ 行列 X_a で決まる

- $X_a \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ($r = \mathrm{rank}\, X_a$) なので

$$X \simeq [\mathbb{C}\ 0]^{\oplus(d_1-r)} \oplus [\mathbb{C}\ \mathbb{C}]^{\oplus r} \oplus [0\ \mathbb{C}]^{\oplus(d_2-r)}$$

A : 環

<u>Def</u> A 加群 $X(\neq 0)$ が 直既約 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

A 加群 Y, Z が $X \simeq Y \oplus Z$ をみたせば $Y=0$ or $Z=0$

<u>Ex</u> 直既約 $\begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{bmatrix}$ 加群は $[\mathbb{C}\ 0]$, $[\mathbb{C}\ \mathbb{C}]$, $[0\ \mathbb{C}]$ の 3つ

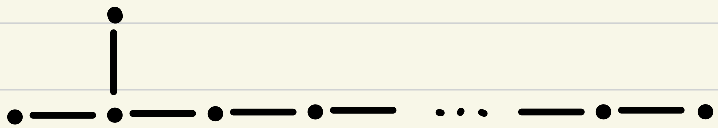
<u>Def</u> A : 有限表現型 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 直既約 A 加群の同型類は有限個

<u>Thm</u> [Gabriel 72] Q : connected quiver

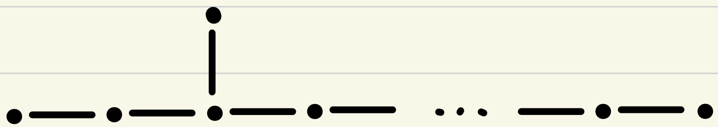
① $\mathbb{C}Q$: 有限表現型 $\Longleftrightarrow$ Q : Dynkin quiver (= 以下のグラフの辺を矢におきかえてえられる quiver

A_n $(n \geq 1)$

D_n $(n \geq 4)$



E_n $(n = 6, 7, 8)$



② ①のとき

$$\underline{\dim} : \{\text{直既約 } \mathbb{C}Q \text{ 加群}\} \xrightarrow{1-1} \{Q \text{ の正ルート}\}$$

ルート系の圏化 → 団代数の圏化の原型

Qの2次形式 : $q_Q(x) := \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{a \in Q_1} x_{s(a)} x_{t(a)}$

Qの正ルート : $d \in \mathbb{N}^{Q_0}$ で $q_Q(d) = 1$ となるもの

<u>Rem</u> Q が non-Dynkin のときも、正ルートを適切に定めると

$\underline{\dim} : \{$ 直既約 $\mathbb{C}Q$ 加群 $\} \twoheadrightarrow \{$ Qの正ルート $\}$

[Kac 80]

団代数の圏化

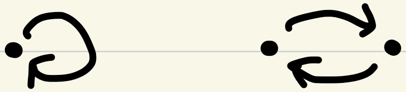
団構造を quiver 表現の圏構造の不変量とみなす

§ 団代数

反対称化可能行列 B ⇝ 団代数 $\mathcal{A}(B)$

$\cup$

反対称行列 B $\xleftrightarrow{1-1}$ ループと2サイクルを持たない quiver Q



$Q \longmapsto B = (b_{ij})_{i,j \in Q_0}$

$b_{ij} := \#\{ i \to j \text{ in } Q_1 \} - \#\{ j \to i \text{ in } Q_1 \}$

このとき $\mathcal{A}(Q) := \mathcal{A}(B)$

Def (quiver mutation) Q: quiver as above, $k \in Q_0$

① $t(a) = k = s(b)$ をみたす全ての矢のペア (a, b) に対し、

新しい矢 $[ba] : s(a) \longrightarrow t(b)$ をつけ加える

② kを端点とする全ての矢の向きを逆にする

Bernstein–Gelfand–Ponomarev reflection（鏡映）

③ 2サイクルを1つずつ無くなるまで取り除く

<u>Ex</u>

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 2 \arrow[dr, "b"] & \\
1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"]
\end{tikzcd}
\overset{①}{\rightsquigarrow}
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 2 \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur] \arrow[rr, shift left, "{[ba]}"] & & 3 \arrow[ll, shift left]
\end{tikzcd}
\overset{②}{\rightsquigarrow}
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 2 \arrow[dl] & \\
1 \arrow[rr, shift left] & & 3 \arrow[ll, shift left] \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\overset{③}{\rightsquigarrow}
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 2 \arrow[dl] & \\
1 & & 3 \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

$F := \mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_n)$: n変数有理関数体

quiver Rで $R_0 = \{1, 2, \cdots, n\}$ なるものと

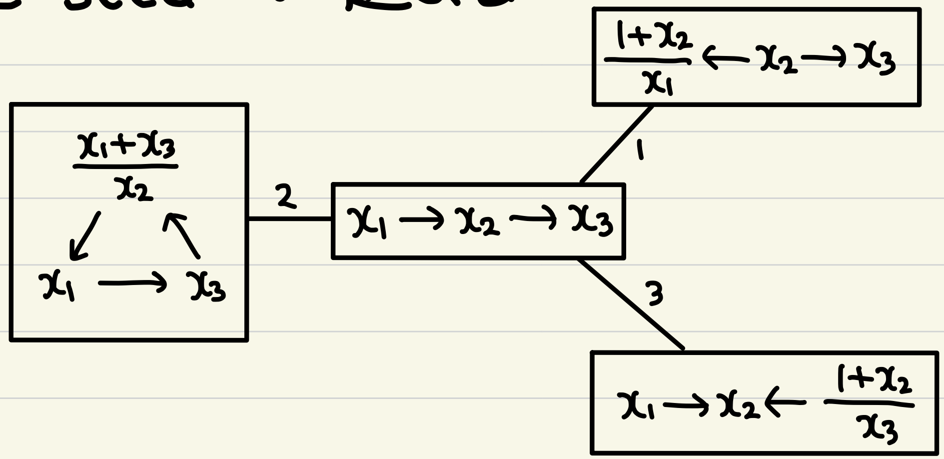
Fの生成元 $u_1, \cdots, u_n$ の組 $(R, \{u_1, \cdots, u_n\})$ を seed とよぶ

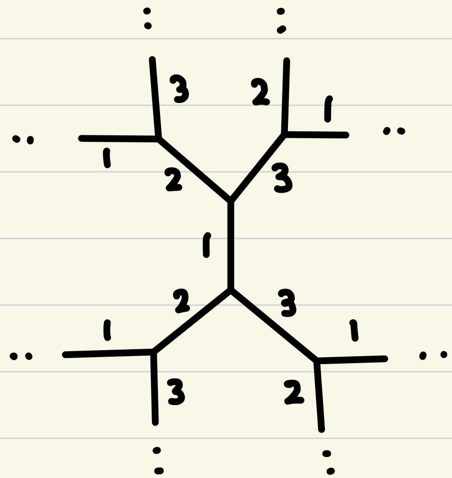
<u>Def</u> (seed mutation) $k \in R_0$

$$\mu_k(R, \{u_1, \cdots, u_n\}) := (\mu_k(R), \{u_1, \cdots, u'_k, \cdots, u_n\})$$

$$u'_k := \frac{1}{u_k}\left(\prod_{\substack{a\in R_1\\ t(a)=k}} u_{s(a)} + \prod_{\substack{a\in R_1\\ s(a)=k}} u_{t(a)}\right)$$

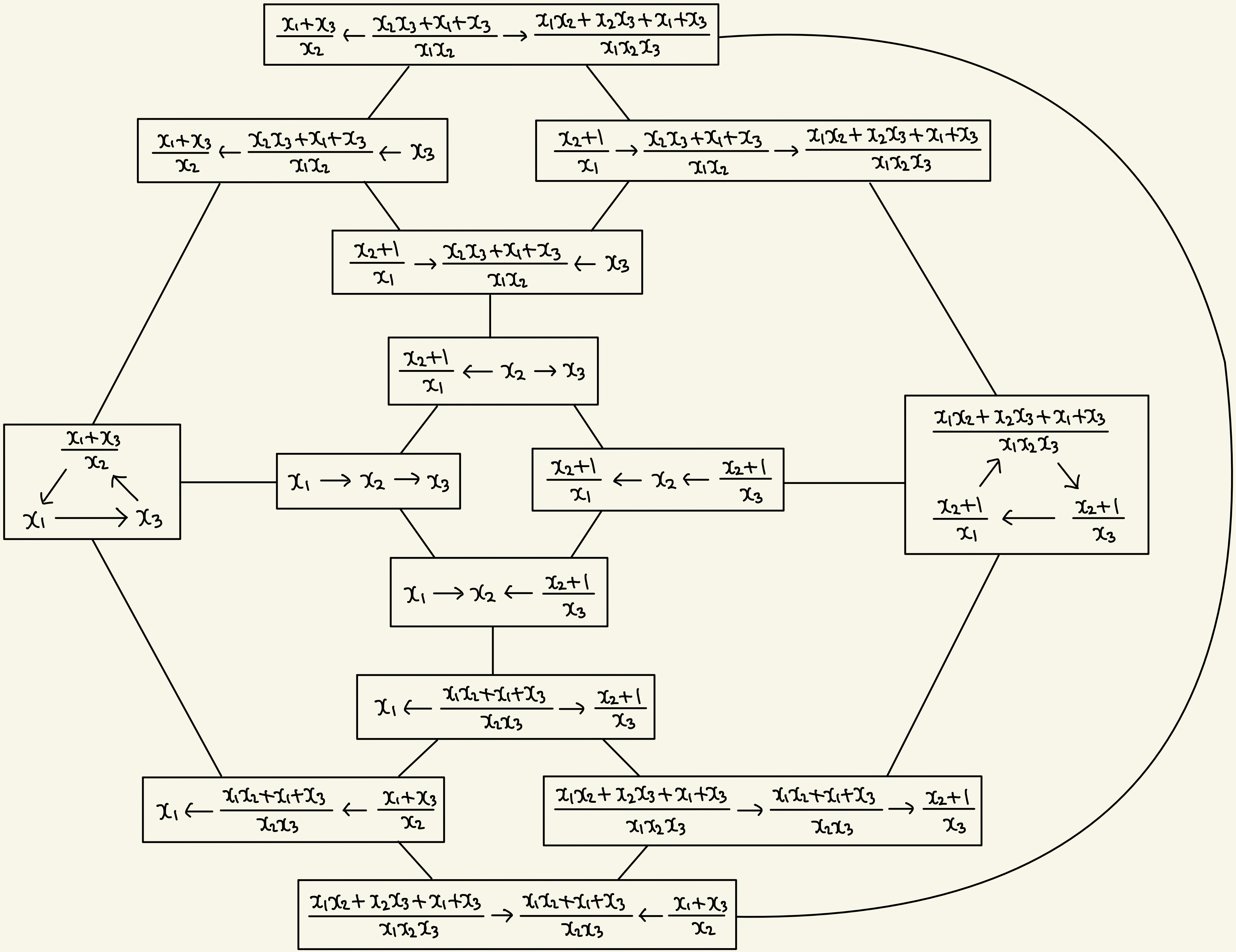
seed $(Q, \{x_1,\cdots,x_n\})$ に mutation をくり返して．n 正則木 $\mathbb{T}_n$ の各点に seed が定まる





<u>Def</u> このようにして得られる各 seed $(R, \{u_1,\cdots,u_n\})$ に対し．
$\{u_1,\cdots,u_n\}$ を団 (cluster)．各 u_i を団変数 (cluster variable) とよぶ

$$\mathcal{A}(Q) := \mathbb{Z}[u \mid 団変数] \subset \mathcal{F} \quad 団代数\ (\text{cluster algebra})$$


$\frac{x_1+x_3}{x_2} \leftarrow \frac{x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2} \rightarrow \frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2x_3}$
$\frac{x_1+x_3}{x_2} \leftarrow \frac{x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2} \leftarrow x_3$
$\frac{x_2+1}{x_1} \rightarrow \frac{x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2} \rightarrow \frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2x_3}$
$\frac{x_2+1}{x_1} \rightarrow \frac{x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2} \leftarrow x_3$
$\frac{x_2+1}{x_1} \leftarrow x_2 \rightarrow x_3$
$\frac{x_1+x_3}{x_2}$ x_1 x_3
$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$
$\frac{x_2+1}{x_1} \leftarrow x_2 \leftarrow \frac{x_2+1}{x_3}$
$\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2x_3}$ $\frac{x_2+1}{x_1}$ $\frac{x_2+1}{x_3}$
$x_1 \rightarrow x_2 \leftarrow \frac{x_2+1}{x_3}$
$x_1 \leftarrow \frac{x_1x_2+x_1+x_3}{x_2x_3} \rightarrow \frac{x_2+1}{x_3}$
$x_1 \leftarrow \frac{x_1x_2+x_1+x_3}{x_2x_3} \leftarrow \frac{x_1+x_3}{x_2}$
$\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2x_3} \rightarrow \frac{x_1x_2+x_1+x_3}{x_2x_3} \rightarrow \frac{x_2+1}{x_3}$
$\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2x_3} \rightarrow \frac{x_1x_2+x_1+x_3}{x_2x_3} \leftarrow \frac{x_1+x_3}{x_2}$

Def $\mathcal{A}(Q)$: 有限型 $\Longleftrightarrow$ 団変数が有限個

Thm [Fomin-Zelevinsky 03]

① $\mathcal{A}(Q)$: 有限型 $\Longleftrightarrow$ Dynkin quiver に mutation をくり返して Q がえられる

② Dynkin quiver Q に対し

$$\{\mathcal{A}(Q)\text{の団変数}\} \setminus \{x_1, \cdots, x_n\} \xrightarrow{1-1} \{Q\text{の正ルート}\}$$

とくに

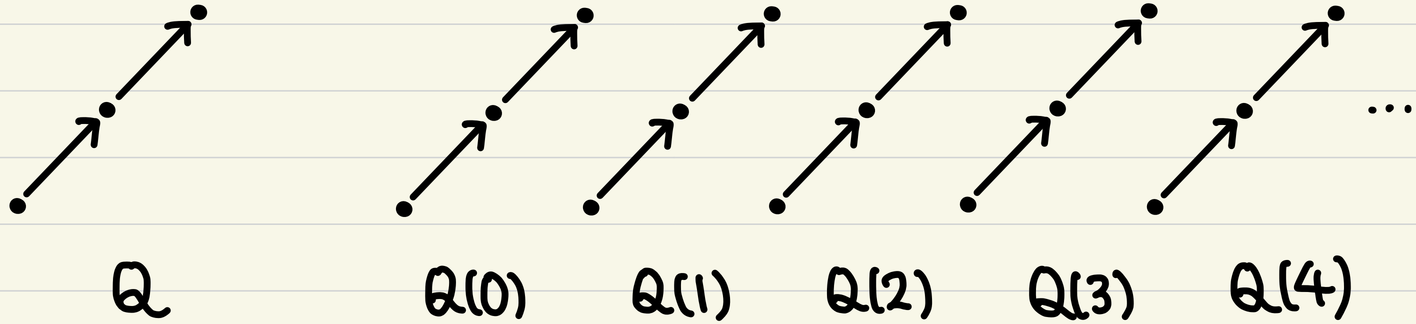
$$\boxed{\{\text{直既約 }\mathbb{C}Q\text{加群}\} \xrightarrow{1-1} \{\mathcal{A}(Q)\text{の団変数}\} \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}}$$

$$\begin{tikzcd}
\{\text{直既約 }\mathbb{C}Q\text{加群}\} \arrow[dr, "\text{[Gabriel] } 1-1"'] & & \{\mathcal{A}(Q)\text{の団変数}\} \setminus \{x_1, \cdots, x_n\} \\
& \{Q\text{の正ルート}\} \arrow[ur, "1-1\ \text{[FZ]}"'] &
\end{tikzcd}$$

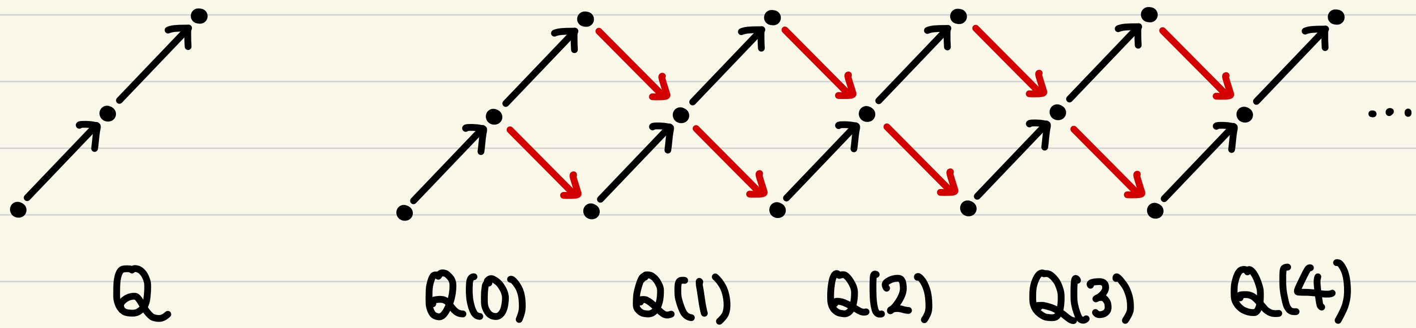
frieze による計算　Q : acyclic quiver

① Qのコピー Q(i) (i≥0) を並べる

Ex



② Qの各矢に対し、逆向きの矢を Q(i) から Q(i+1) へ描く



③ Q(0)の点 i に x_i を書き、以下のルールで 左から順に
$\mathcal{F}$の元を書いていく

ルール

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & v_1 \arrow[ddr] & \\ & v_2 \arrow[dr] & \\ u \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots & w \\ & v_\ell \arrow[ur] & \end{tikzcd} \Rightarrow \quad w = \frac{1}{u}\left(1 + v_1 v_2 \cdots v_\ell\right)$$

ただし u からは ℓ 本の矢が出ている．また，u と w は Q の同じ点．

Ex

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & & x_3 \arrow[dr] & & \frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2x_3} \arrow[dr] & & x_1 \arrow[dr] & & \\ & x_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \frac{x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \frac{x_1x_2+x_1+x_3}{x_2x_3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & x_2 \arrow[dr] & \\ x_1 \arrow[ur] & & \frac{x_2+1}{x_1} \arrow[ur] & & \frac{x_1+x_3}{x_2} \arrow[ur] & & \frac{x_2+1}{x_3} \arrow[ur] & & x_3 \end{tikzcd}$$

Rem
- 特別な seed mutation を計算している
- Dynkin quiver なら，全ての団変数が得られる

$\boxed{\text{frieze} \fallingdotseq \text{quiver 表現の Auslander-Reiten quiver}}$

$\mathbb{C}Q$ の Auslander-Reiten quiver

- 点 : 直既約 $\mathbb{C}Q$ 加群
- 矢 : 既約射 (非自明な方法で 2つの射の合成にならない)

<u>Ex</u> $Q = [1 \to 2 \to 3]$ $\quad \mathbb{C}Q = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{bmatrix}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & {[\mathbb{C}\,\mathbb{C}\,\mathbb{C}]} \arrow[dr] & & \\
 & {[\mathbb{C}\,\mathbb{C}\,0]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[0\,\mathbb{C}\,\mathbb{C}]} \arrow[dr] & \\
{[\mathbb{C}\,0\,0]} \arrow[ur] & & {[0\,\mathbb{C}\,0]} \arrow[ur] & & {[0\,0\,\mathbb{C}]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & \frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2x_3} \arrow[dr] & & \\
 & \frac{x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \frac{x_1x_2+x_1+x_3}{x_2x_3} \arrow[dr] & \\
\frac{x_2+1}{x_1} \arrow[ur] & & \frac{x_1+x_3}{x_2} \arrow[ur] & & \frac{x_2+1}{x_3}
\end{tikzcd}$$

$\nearrow$ は自然な単射. $\searrow$ は自然な全射

直既約加群 X と団変数 u が対応するとき.

- (U の分母の指数) = $\underline{\dim} X$
- (U の分子の項の数) = (X の部分加群の数)

$\underline{\text{Ex}}$ $X = [\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}]$ は 4つの部分加群を持つ

$$\underset{x_2 x_3}{[000]} \subset \underset{x_3}{[\mathbb{C}00]} \subset \underset{x_1}{[\mathbb{C}\mathbb{C}0]} \subset \underset{x_1 x_2}{[\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}]}$$

$\mathbb{C}Q$ 加群 X. $\ell = (\ell_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$

$$Gr_\ell(X) := \left\{ (Y_i)_{i \in Q_0} \in \prod_{i \in Q_0} Gr_{\ell_i}(X_i) \;\middle|\; Y \text{ は } X \text{ の } \mathbb{C}Q \text{ 部分加群} \right\}$$

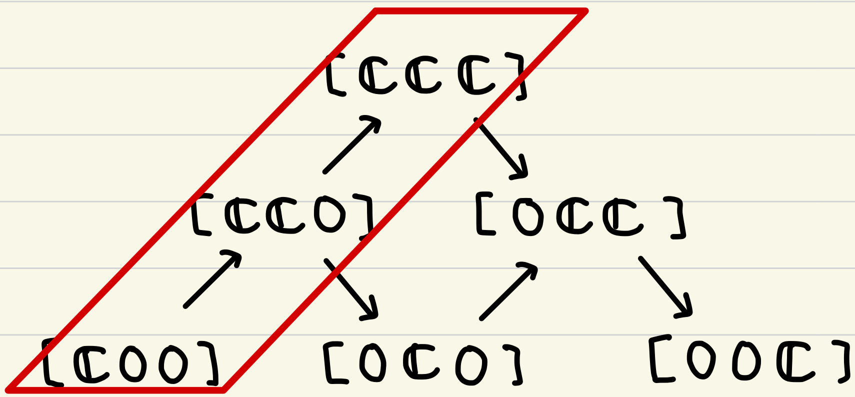
quiver Grassmannian

$$CC(X) := \frac{1}{x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}} \left(\sum_{0 \le \ell \le d} \underbrace{\chi(Gr_\ell(X))}_{\text{Euler 標数}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\sum_{i \to j} \ell_j + \sum_{j \to i} (d_j - \ell_j)} \right)$$

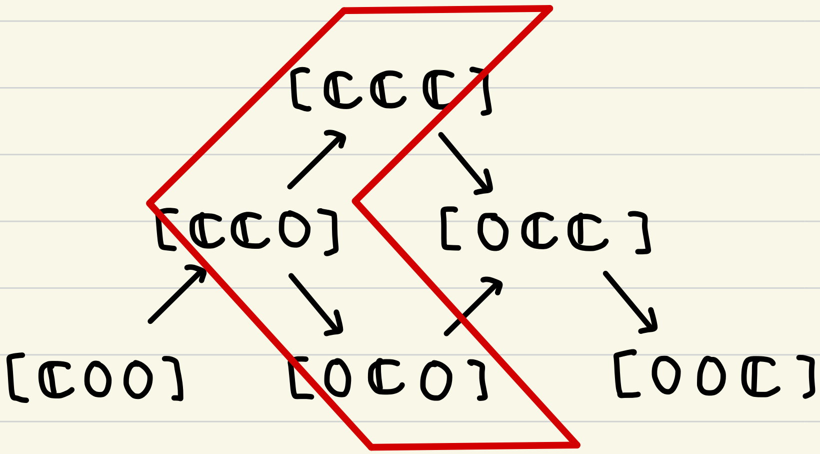
Thm [Caldero-Chapoton 06] Q : Dynkin quiver

直既約 CQ 加群 X に対応する団変数は CC(X)

問
- non-Dynkin では？
- 初期団変数の対応物は？
- 団はどのような CQ 加群？
- gベクトル，cベクトルは CQ 加群の何？



CQ



BGP reflection

§ 導来圏と傾理論

ホモロジー代数学で基本的

A：環　$\mathrm{Mod}\,A$：A加群の圏

- $C(\mathrm{Mod}\,A)$

対象．A加群の複体 $X=[\cdots \to X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} X^{0} \xrightarrow{d^{0}} X^{1} \to \cdots]$　$d^{i+1}\circ d^{i}=0$

射：鎖準同型

$$
\begin{array}{ccccccccc}
X = [\cdots & \to & X^{-1} & \to & X^{0} & \to & X^{1} & \to & \cdots] \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^{0}} & & \downarrow{\scriptstyle f^{1}} & & \\
Y = [\cdots & \to & Y^{-1} & \to & Y^{0} & \to & Y^{1} & \to & \cdots]
\end{array}
$$

f：擬同型 $\Leftrightarrow$ $\forall i \in \mathbb{Z}$，$H^{i}(f): H^{i}(X) \simeq H^{i}(Y)$

- $D(\mathrm{Mod}\,A)$：Aの導来圏（derived category）

$\cup$　$C(\mathrm{Mod}\,A)$に．全ての擬同型の逆射をつけ加えたもの

$D^{b}(\mathrm{mod}\,A)$：有限生成A加群の有界複体

$\cup$

$K^{b}(\mathrm{proj}\,A)$：有限生成射影A加群の有界複体

$i \in \mathbb{Z}$ に対し $[i] : D(\mathrm{Mod}\,A) \xrightarrow{\sim} D(\mathrm{Mod}\,A)$ シフト関手

$$\left[\cdots \to \underset{-1}{X^{-1}} \xrightarrow{d^{-1}} \underset{0}{X^{0}} \xrightarrow{d^{0}} \underset{1}{X^{1}} \to \cdots \right][i] := \left[\cdots \to \underset{-1}{X^{i-1}} \xrightarrow{\pm d^{i-1}} \underset{0}{X^{i}} \xrightarrow{\pm d^{i}} \underset{1}{X^{i+1}} \to \cdots \right]$$

- $X, Y \in \mathrm{Mod}\,A$ $\quad \mathrm{Hom}_{D(\mathrm{Mod}A)}(X, Y[i]) = \begin{cases} \mathrm{Ext}^{i}_{A}(X, Y) & i \geq 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases}$

<u>Ex</u> $Q = [1 \to 2 \to 3]$

$\mathbb{C}Q = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{bmatrix}$

$D^b(\mathrm{mod}\,\mathbb{C}Q)$ の Auslander-Reiten quiver

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
\cdots & & {[0\,0\,\mathbb{C}][-1]} \arrow[dr] & & {[\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}]} \arrow[dr] & & {[\mathbb{C}\,0\,0][1]} \arrow[dr] & & {[0\,\mathbb{C}\,0][1]} \arrow[dr] & & {[0\,0\,\mathbb{C}][1]} & \\
& {[0\,\mathbb{C}\mathbb{C}][-1]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[\mathbb{C}\mathbb{C}\,0]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[0\,\mathbb{C}\mathbb{C}]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[\mathbb{C}\mathbb{C}\,0][1]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[0\,\mathbb{C}\mathbb{C}][1]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
\cdots & & {[\mathbb{C}\,0\,0]} \arrow[ur] & & {[0\,\mathbb{C}\,0]} \arrow[ur] & & {[0\,0\,\mathbb{C}]} \arrow[ur] & & {[\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}][1]} \arrow[ur] & & {[\mathbb{C}\,0\,0][2]} &
\end{tikzcd}$$

<u>Fact</u> $\forall$ quiver Q. $D(\mathrm{Mod}\,\mathbb{C}Q)$ の直既約対象は $X[i]$

$(X \in \mathrm{Mod}\,\mathbb{C}Q,\ i \in \mathbb{Z})$

Thm [森田 58] 環 A, B に対し、以下は同値

① $\exists$ 圏同値 $\mathrm{Mod}\,A \simeq \mathrm{Mod}\,B$

② $\exists$ 圏同値 $\mathrm{proj}\,A \simeq \mathrm{proj}\,B$

③ $\exists$ A の射影生成元 P s.t. $\mathrm{End}_A(P) \simeq B$

森田同値

Ex A と行列環 $M_\ell(A)$ $(\ell \geq 1)$ は $P := A^{\oplus \ell}$ により森田同値

傾理論 (tilting theory) : 導来圏の森田理論

Thm [Rickard 89] 環 A, B に対し、以下は同値

① $\exists$ 圏同値 $D(\mathrm{Mod}\,A) \simeq D(\mathrm{Mod}\,B)$

② $\exists$ 圏同値 $K^b(\mathrm{proj}\,A) \simeq K^b(\mathrm{proj}\,B)$

③ $\exists$ A の傾複体 T s.t. $\mathrm{End}_{D(\mathrm{Mod}A)}(T) \simeq B$

Def $T \in D(\mathrm{Mod}A)$: A の tilting complex (傾複体)

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \cdot\ \mathrm{Hom}_{D(A)}(T, T[\ell]) = 0 \quad \forall \ell \neq 0 \\ \cdot\ \mathrm{thick}\, T = K^b(\mathrm{proj}\, A) \end{cases}$$

- $X \in D(\mathrm{Mod}A)$ からはじめて、シフト関手、写像錐、直和因子をとる操作をくり返して得られるものの全体を thick X と表す

Ex
- A 自身は A の tilting complex
- tilting module [Brenner-Butler 80] は tilting complex
- BGP reflection

90年代〜 : tilting module の持つ組み合わせ論的構造、変異構造

Ringel, Riedtmann-Schofield, Happel-Unger, …

Def [Keller-Vossieck 88]

$T \in D(\mathrm{Mod} A)$: A の silting complex (準傾複体)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} ① \ \mathrm{Hom}_{D(A)}(T, T[\ell]) = 0 \quad \forall \ell > 0 \\ ② \ \mathrm{thick}\, T = K^b(\mathrm{proj}\, A) \end{cases}$

① のみ満たすとき, presilting complex

- 以下ではさらに T が basic であることも仮定する

($T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$, T_i : 直既約, $T_i \ncong T_j$ ($\forall i \neq j$))

Thm [Aihara-I 12] T : A の silting complex

① $\#\{T$ の直既約直和因子$\} = \#\{A$ の直既約直和因子$\}$

② $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$, T_i : 直既約 とする

$\forall\, 1 \leq k \leq n$, T_k を別のものに入れかえて

新しい silting complex

$$\left.\begin{aligned} \mu_R^-(T) &= (T/T_R)\oplus T_R^* \\ \mu_R^+(T) &= (T/T_R)\oplus {}^*T_R \end{aligned}\right\}$$ が得られる（変異）

③ {A の silting complexes} は自然な半順序を持ち．
その Hasse quiver の矢は変異で与えられる

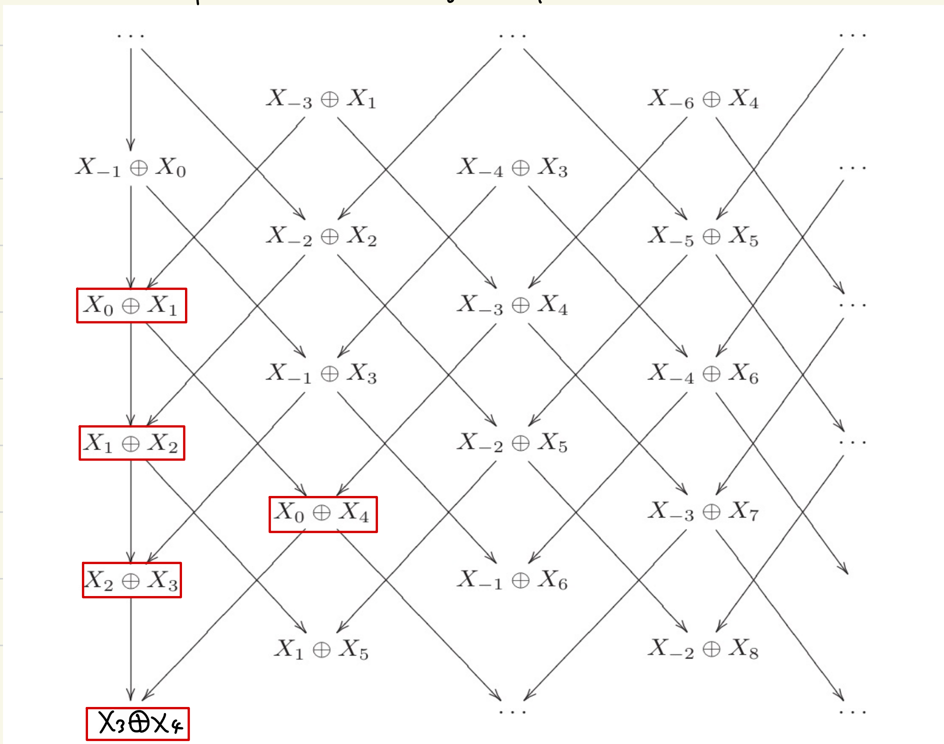
<u>Ex</u> $Q = [1 \to 2]$

$$A = \mathbb{C}Q = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$

$D^b(\mathrm{mod}\,A)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots & \overset{X_{-1}}{[0\,\mathbb{C}][-1]} \arrow[dr] & & \overset{X_1}{[\mathbb{C}\,\mathbb{C}]} \arrow[dr] & & \overset{X_3}{[\mathbb{C}\,0][1]} \arrow[dr] & & \overset{X_5}{[0\,\mathbb{C}][1]} & \cdots \\
& & \underset{X_0}{[\mathbb{C}\,0]} \arrow[ur] & & \underset{X_2}{[0\,\mathbb{C}]} \arrow[ur] & & \underset{X_4}{[\mathbb{C}\,\mathbb{C}][1]} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Hasse quiver of silting complexes　　□ : 2-term



- 団構造に比べて大きすぎる

<u>Def</u> $D^b(\mathrm{mod}A) \ni X$: 2-term $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $X \simeq [\cdots \to 0 \to \underbrace{P^{-1} \longrightarrow P^{0}}_{\mathrm{proj}A} \to 0 \to \cdots]$

<u>Ex</u> $Q = [1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3]$ $\mathbb{C}Q = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{bmatrix}$

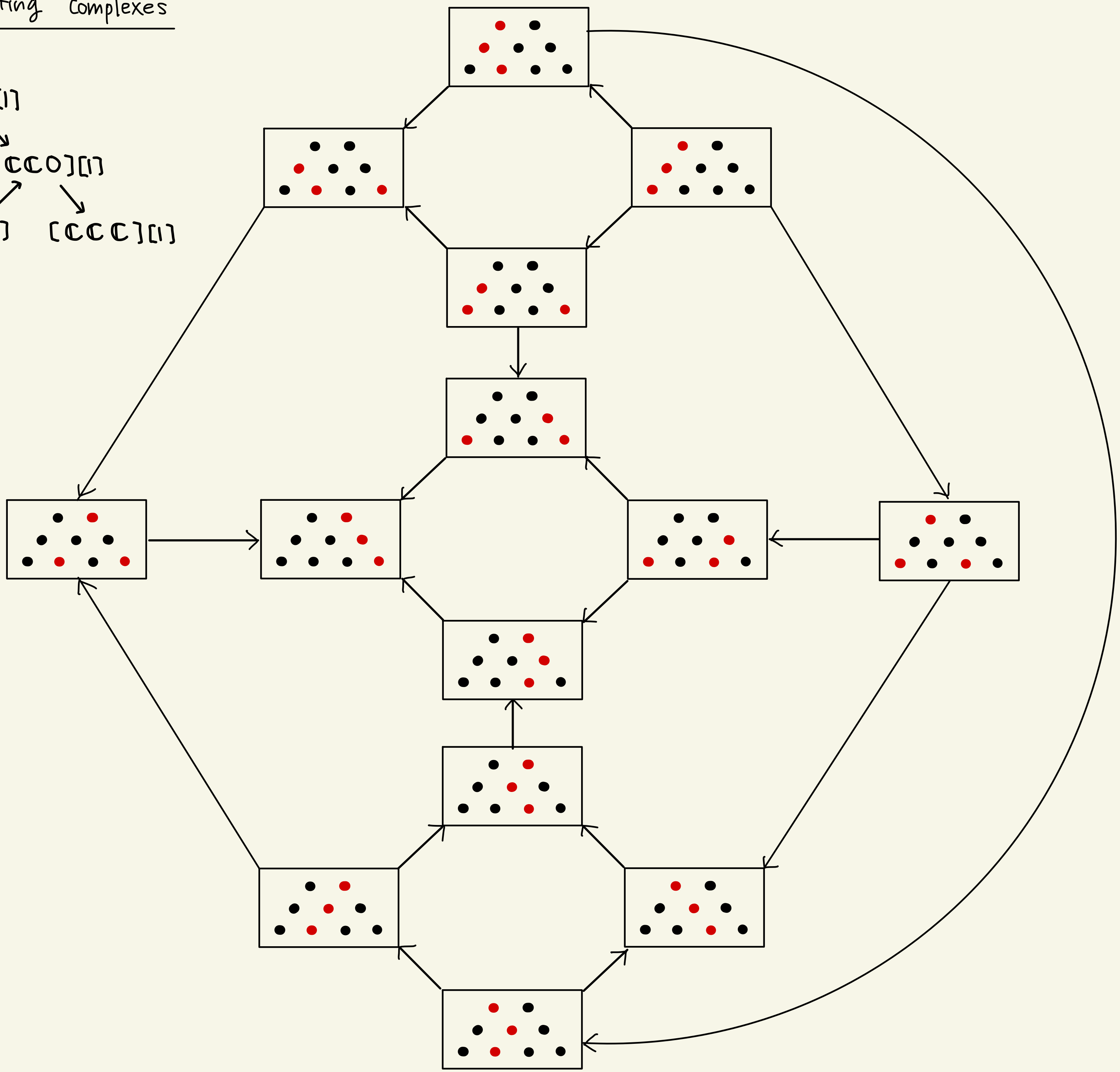
2-term

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
\cdots & {[0\,0\,\mathbb{C}][-1]} \arrow[dr] & & {[\mathbb{C}\,\mathbb{C}\,\mathbb{C}]} \arrow[dr] & & {[\mathbb{C}\,0\,0][1]} \arrow[dr] & & {[0\,\mathbb{C}\,0][1]} \arrow[dr] & & {[0\,0\,\mathbb{C}][1]} & \\
{[0\,\mathbb{C}\,\mathbb{C}][-1]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[\mathbb{C}\,\mathbb{C}\,0]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[0\,\mathbb{C}\,\mathbb{C}]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[\mathbb{C}\,\mathbb{C}\,0][1]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[0\,\mathbb{C}\,\mathbb{C}][1]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
\cdots & {[\mathbb{C}\,0\,0]} \arrow[ur] & & {[0\,\mathbb{C}\,0]} \arrow[ur] & & {[0\,0\,\mathbb{C}]} \arrow[ur] & & {[\mathbb{C}\,\mathbb{C}\,\mathbb{C}][1]} \arrow[ur] & & {[\mathbb{C}\,0\,0][2]} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& & \frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2x_3} \arrow[dr] & & x_1 \arrow[dr] & & \\
& \frac{x_2x_3+x_1+x_3}{x_1x_2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \frac{x_1x_2+x_1+x_3}{x_2x_3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & x_2 \arrow[dr] & \\
\frac{x_2+1}{x_1} \arrow[ur] & & \frac{x_1+x_3}{x_2} \arrow[ur] & & \frac{x_2+1}{x_3} \arrow[ur] & & x_3
\end{tikzcd}$$

Hasse quiver of 2-term silting complexes

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & {[\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}]} \arrow[dr] & & {[\mathbb{C}00][1]} \arrow[dr] & & \\
 & {[\mathbb{C}\mathbb{C}0]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[0\mathbb{C}\mathbb{C}]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[\mathbb{C}\mathbb{C}0][1]} \arrow[dr] & \\
{[\mathbb{C}00]} \arrow[ur] & & {[0\mathbb{C}0]} \arrow[ur] & & {[00\mathbb{C}]} \arrow[ur] & & {[\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}][1]}
\end{tikzcd}
$$



Thm [Caldero-Keller 06 based on Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov 06]

Q : acyclic quiver. $A = \mathbb{C}Q$

① { A の 直既約 2-term presilting complexes } $\xrightarrow{\sim}$ { $\mathcal{A}(Q)$ の団変数 }

$X \mapsto CC(H^0(X))$, $\quad e_iA[1] \mapsto x_i$

② { A の 2-term silting complexes } $\xrightarrow{\sim}$ { $\mathcal{A}(Q)$ の団 }

Fact ① $Q_0 \xrightarrow{1-1}$ { 直既約 射影 A 加群 }

$i \longmapsto e_iA$

② $T = [\cdots \to 0 \to P^{-1} \to P^0 \to 0 \to \cdots]$: A の silting complex

$\Rightarrow$ $\forall$ 直既約 射影 A 加群は、P^{-1} と P^0 の片方のみの直和因子

gベクトルの圏化

$$\mathbf{g}_{k;t'} = -\mathbf{g}_{k;t} + \sum_{i=1}^{n}[b^t_{ik}]_+\mathbf{g}_{i;t} - \sum_{j=1}^{n}[b^t_{n+j,k}]_+\mathbf{b}^0_j = -\mathbf{g}_{k;t} + \sum_{i=1}^{n}[-b^t_{ik}]_+\mathbf{g}_{i;t} - \sum_{j=1}^{n}[-b^t_{n+j,k}]_+\mathbf{b}^0_j$$

$K_0(K^b(\mathrm{proj}\,A))$: Grothendieck群

$$:= \bigoplus_{X\in K^b(\mathrm{proj}\,A)} \mathbb{Z}[X] \Big/ \langle [X]-[Y]+[Z] \mid \underbrace{X\to Y\to Z\to X[1]}_{\text{triangle}} \rangle$$

$$\simeq K_0(\mathrm{proj}\,A) = \bigoplus \mathbb{Z}[P]$$

P: 直既約射影A加群

Cor Q: acyclic quiver. $A=\mathbb{C}Q$

①
$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{array}{l}A\text{の直既約 2-term} \\ \text{presilting complexes}\end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & K_0(\mathrm{proj}\,A) \arrow[d, "\wr"] \\
\{\mathcal{A}(Q)\text{の団変数}\} \arrow[r, "g\text{ベクトル}"'] & \mathbb{Z}^n
\end{tikzcd}$$

② $\forall$ 団 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ と u_i の gベクトル $g_i \in \mathbb{Z}^n$ に対し.
G行列 $[g_1, \cdots, g_n]$ の各行は $\mathbb{N}^n$ or $-\mathbb{N}^n$ に含まれる
(sign-coherence)

cベクトルの圏化

$$
\mathbf{c}_{\ell;t'} = \begin{cases} -\mathbf{c}_{\ell;t} & \text{if } \ell = k; \\ \mathbf{c}_{\ell;t} + [b_{k\ell}]_+ \, \mathbf{c}_{k;t} & \text{if } b^t_{n+i,k} \geqslant 0 \text{ for all } i; \\ \mathbf{c}_{\ell;t} + [-b_{k\ell}]_+ \, \mathbf{c}_{k;t} & \text{if } b^t_{n+i,k} \leqslant 0 \text{ for all } i. \end{cases}
$$

$$K_0(D^b(\mathrm{mod}\,A)) \simeq K_0(\mathrm{mod}\,A) = \bigoplus \mathbb{Z}[S]$$

Grothendieck群 P: 単純A加群

$$Q_0 \xrightarrow{1-1} \{\text{単純A加群}\}$$

$$i \longmapsto S_i := (\text{次元ベクトル } (0 \cdots \overset{i}{1} \cdots 0) \text{ の加群})$$

$$K_0\left(\begin{array}{ccc} K^b(\mathrm{proj}\,A)\times D^b(\mathrm{mod}\,A) & \longrightarrow & D^b(\mathrm{mod}\,\mathbb{C}) \\ (X,Y) & \longmapsto & \mathrm{RHom}_A(X,Y) \end{array}\right.$$

$$\downarrow$$

$$K_0(\mathrm{proj}\,A)\times K_0(\mathrm{mod}\,A) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$\{e_iA\}_{i\in Q_0}$ と $\{S_i\}_{i\in Q_0}$ は双対基底

<u>Def</u> $X = X_1\oplus\cdots\oplus X_n \in D^b(\mathrm{mod}\,A)$: simple-minded collection

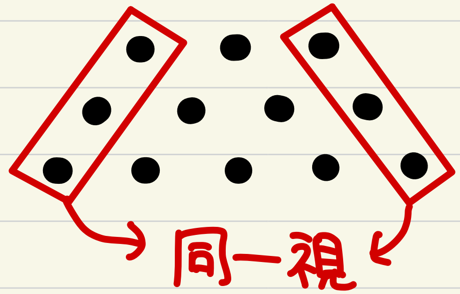
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases} \cdot\ \mathrm{Hom}_{D(\mathrm{Mod}A)}(X_i,X_j) = \begin{cases}\mathbb{C} & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases} \\ \cdot\ \mathrm{Hom}_{D(\mathrm{Mod}A)}(X,X[\ell]) = 0 \quad \forall \ell<0 \\ \cdot\ \mathrm{thick}\,X = D^b(\mathrm{mod}\,A) \end{cases}$$

Cor Q: acyclic quiver. $A = \mathbb{C}Q$

①
$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{array}{c} A \text{ の 2-term} \\ \text{silting complexes} \end{array}\right\} \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "\wr"] & \left\{\begin{array}{c} A \text{ の 2-term} \\ \text{simple-minded} \\ \text{collections} \end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & K_0(\mathrm{mod}A)^{\oplus n} \arrow[d, "\wr"] \\
\{\Delta(Q) \text{ の団}\} \arrow[rr, "C\text{行列}"'] & & M_n(\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

② $\forall$ 団 $\{U_1, \cdots, U_n\}$ の C行列 $[c_1, \cdots, c_n]$ の各列は $\mathbb{N}^n$ or $-\mathbb{N}^n$ に含まれる (sign-coherence)

• 導来圏を用いて団圏 (cluster category) $\mathcal{C}(Q)$ が定義される [BMRRT]. 団構造の圏化に程良い大きさと優れた対称性 (2-Calabi-Yau 性) を持つ



(seed の quiver) は $\mathcal{C}(Q)$ により圏化される

$\boxed{\text{Q が acyclic でないとき}}$ quiver with potential (Q, W) を考える

• $\mathbb{C}Q$ の代わりに Jacobian algebra $P(Q,W)$ に対して ㉕〜㉙ の Thm, Cor が成立する (ただし reachable な (pre) silting に制限する)

• 団圏 $\mathcal{C}(Q,W)$ は Ginzburg dg algebra の導来圏から定義される [Amiot, Keller]

[Derksen-Weyman-Zelevinsky, Nagao, Plamondon, …
Cerulli Irelli-Keller-Labardini-Fragoso-Plamondon]

数理科学 2015年3月号「団代数と傾理論, 団傾理論」参照

- 2-term silting complex 以外の言葉で Thm, Cor が述べられることも多い

Thm [König-Yang, Adachi-I-Reiten, Brüstle-Yang, Asai, Marks-Stovicek, …]
以下のものの間に1対1対応が存在する

① A の 2-term silting complexes
② A の 2-term simple-minded collections
③ A の support τ-tilting modules
④ $\mathcal{C}(Q,W)$ の cluster tilting objects ($A = P(Q,W)$ のとき)
⑤ A の左有限な semibricks
⑥ $K^b(\mathrm{proj}\,A)$ の 2-term co-t-structures
⑦ $D^b(\mathrm{mod}\,A)$ の 2-term algebraic t-structures
⑧ A の関手的有限な torsion classes
⑨ A の左有限な wide subcategories
⋮