Discussion Paper No.347

Aumann Structure with Complete Lattice and Unawareness: Constructive Approach

中央大学大学院博士後期課程
多田　由彦

May　2021

INSTITUTE OF ECONOMIC RESEARCH
Chuo University
Tokyo, Japan

Aumann Structure with Complete Lattice and Unawareness: Constructive Approach

2021 年 5 月 28 日

中央大学大学院博士後期課程
多田　由彦

I　Introduction

本稿は集合論アプローチから標準的な状態空間を完備束として定式化することによって，標準的な状態空間上で unawareness を議論する方法を提案する．Unawareness は状態空間上の事象に対する高階の無知 “higher-order unknown” を表す演算子であり，Fagin and Halpern (1988) によって定義された．しかし標準的な Aumann structure では，知識演算子が Necessitation と Monotonicity を満たし，(言い換えると可能性対応が分割的であり)，かつ unawareness 演算子が plausibility, KU 内省，AU 内省を満たすならば，non-trivial unawareness をモデル化することができないことが Dekel et al. (1998) によって示された．

Non-trivial unawareness を議論可能とするために，その後の研究は 2 つに分かれた．1 つは非分割的状態空間モデルにおいて non-trivial unawareness を議論するアプローチであり，もう 1 つは unawareness structure モデルにおいて non-trivial unawareness を議論するアプローチである.[1][2] それぞれのモデルにおける状態空間は，数理的に異なる構造をしている．非分割的状態空間モデルにおける状態空間は平面的 “flat” であり，各状態と他の状態との順序関係については考えず，各状態それぞれが極大元かつ極小元となっている．対照的に unawareness structure モデルにおける状態空間は非平面的 “non-flat” である．このモデルでは状態空間の集合族を定義し，それが互いに素な完備束であることを仮定する．集合族が順序集合であるので，各状態もまた順序関係を持っていると言える．[3]

---

[1] 非分割的状態空間モデルにおける non-trivial unawareness の主要な研究として Geanakoplos (1989) が挙げられる．Unawareness structure モデルの主要な研究として Heifetz, et al. (2006), Li (2009) が挙げられる．近年では Fukuda (2020) が 2 つのモデルの特徴を合わせた stationary generalized-state-space model を提案し，分析を行なっている．

[2] 先行研究では Heifetz et al. (2006) のモデルを unawareness structure モデルとよび, Li (2009) のモデルを information structure with unawareness モデルと呼んで区別しているが，本稿では両者をまとめて unawareness structure モデルと統一して呼ぶこととする．

[3] Unawareness に関連する研究をサーベイしたものとして, Schipper (2014; 2015) が挙げ

Heifetz et al. (2006) も Li (2009) も，互いに素な状態空間の集合族が完備束であることから議論を始める．しかしながら，このような状態空間の構築は冗長であるように思われる．標準的な状態空間モデルを完備束であるとした方が，より単純化された形で議論できるのではないだろうか？ 本稿はこの推測に取り組む．これから我々が構築する状態空間（constructive state space）は状態空間の集合族を考えることなしに構成法的アプローチでモデル化する．我々の状態空間はそれ自身が完備束でありながら，Heifetz et al. (2006) や Li (2009) のモデルと置き換えが可能であり，逆もまた成り立つ．但し，我々の構成法的アプローチでは，標準的な演算子は使い勝手が悪い．なぜなら，Heifetz et al. (2006) や Li (2009) での ϕ に相当する状態を構築することができないからである．そこで我々は多重定義された演算子（overloaded operator）を定義することによってこの問題点を回避する．我々の演算子は複数のアリティを持つことを認める．本稿の状態空間は Heifetz et al. (2008) のものに似ているかもしれない．しかしながら，我々の状態空間はいくつかの観点で，例えば構成法や仮定などについて，彼らのものとは異なる．

我々の状態空間において，任意の（主観的）状態空間は constructive state space の部分集合をなす．従って，同じ状態が異なる状態空間上にわたって存在することがありうる．但し，同じ状態であったとしても，別々の状態空間に属しているときその意味するところは異なってくる．なぜなら片方の状態空間での状態が含んでいるはずの属性について，別の状態空間では取り除かれているかもしれないからである．各状態はどの状態空間に属しているのかによってその意味が決められるのである．言い換えれば，与えられた状態空間上の他の状態との関係によって，各状態の意味が決まる．関係性の中で意味が定まるという特徴は圏論の議論に似ている．

本稿は constructive state space を用いた Aumann structure をモデル化し，その上で可能性対応，知識演算子，awareness/unawareness 演算子を定義する．知識演算子や awareness/unawareness 演算子のほとんどの性質については先行研究と同様のものを得られたが，いくつかの性質については，等号が成り立たないかもしれない．また Symmetry については Non-triviality と共存ができない．先行研究では Symmetry を証明するか（e.g., Heifetz et al. 2006, Li 2009, Fukuda 2020), Symmetry を公理として仮定するか（e.g., Modica and Rustichini 1994; 1999, Halpern 2001, Heifetz et al. 2008）のいずれかであった．我々は Symmetry が non-trivial unawareness と共存できないという性質を Reverse Symmetry と名づける．Reverse Symmetry は 2 つの含意を持つ．1 つは，我々は主体が認識している事象と，主体が認識することのできないその事象の否定事象とを同じように議論するべきではないということである．もう 1 つは awareness/unawareness を議論するにあたって，様相論理における S5 が成立しない状況を考える必要があるかもしれないということである．Modica and Rustichini (1994) は S4+Symmetry=S5 を証明した．しかし我々のモ

られる．

デルでは Symmetry with non-trivial unawareness が成立しない．従って，今後の様相論理での研究では S4+Reverse Symmetry を想定したモデルを考察する必要があることを示唆する．

我々の結論は先行研究における幾つかの性質と異なる結果を導いた．しかし同時に constructive Aumann structure 上で Dekel et al. (1998) や Chen et al. (2012) の主要定理を証明することができる．知識演算子や awareness/unawareness 演算子のほとんどの性質については先行研究と同様のものを導いているので，我々のモデルは標準的な状態空間モデルと unawareness structure モデルとの中間に位置づけられるだろう．

次の節では Heifetz et al. (2006) の状態空間（HMS-state space）と Li (2009) の状態空間（Li-state space）をそれぞれ定式化する．Ⅲ節では constructive state space を定式化し，HMS-state space と Li-state space と置き換えが可能であることを示す．Ⅳ節では constructive Aumann structure 上での可能性対応，知識演算子, unawareness 演算子を定式化し，それぞれの性質を特徴づけてから Dekel et al. (1998) の主要定理と Chen et al. (2012) の主要定理を一般化した．最後の節は結論を述べた．

II　State Space in Unawareness Structure

本節では HMS (2006) が定義した状態空間と Li (2009) が定義した状態空間をそれぞれ定式化する．本稿の目的は constructive Aumann structure で unawareness を議論することにあるので，それぞれが定式化した unawareness structure については議論しない.[4]

2-1　HMS-state space

まず Heifetz et al. (2006) が定義した状態空間, HMS-state space，を定式化する．まず互いに素な完備束 $\mathcal{S} = \{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を取り出す．$\mathcal{S}$ は互いに素な状態空間の集合族であり，各要素である $S_\lambda \in \mathcal{S}$ は状態空間を表す．ここで $\preccurlyeq$ は $\mathcal{S}$ 上の半順序を表し，任意の $S, S' \in \mathcal{S}$ に対して，$S \succcurlyeq S'$ の時，S は S' よりも詳細に記されているという．この時，全射の射影 $R^S_{S'}: S \longrightarrow S'$ を定義できるものとし，任意の $\omega \in S$ に対して，$R^S_{S'}(\omega) \in S'$ とする．ここで HMS-state space は $\mathcal{S}$ 上の各状態空間の合併 $\Sigma = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ として表される．HMS-state space において標準的な状態空間は Σ ではなく，$\mathcal{S}$ 上の各要素である．言い換えると，HMS-state space Σ は互いに素な標準的な状態空間の合併である．

Example 1　互いに素な完備束 $\mathcal{S} = \left\{S_{\{x,y\}}, S_{\{x\}}, S_{\{y\}}, S_{\{\phi\}}\right\}$ を考える．それぞれの状態空間

[4] Unawareness structure に関連のある議論としては, Heifetz et al. (2006; 2008; 2013), Li (2009), Heinsalu (2012), Galanis (2013; 2018) などが挙げられる．

は $S_{\{x,y\}} = \{xy, x\neg y, \neg xy, \neg x\neg y\}$，$S_{\{x\}} = \{x, \neg x\}$，$S_{\{y\}} = \{y, \neg y\}$，$S_{\{\phi\}} = \{\phi\}$ とする．x は「x は真である」とし $\neg x$ は「x は偽である」とする．例えば，2 つの状態空間 $S_{\{x,y\}}, S_{\{x\}}$ について，$S_{\{x,y\}} \succcurlyeq S_{\{x\}}$ が成立する．この時，全射の射影 $R^{S_{\{x,y\}}}_{S_{\{x\}}}: S_{\{x,y\}} \longrightarrow S_{\{x\}}$ が存在し，$R^{S_{\{x,y\}}}_{S_{\{x\}}}(xy) = R^{S_{\{x,y\}}}_{S_{\{x\}}}(x\neg y) = x$，$R^{S_{\{x,y\}}}_{S_{\{x\}}}(\neg xy) = R^{S_{\{x,y\}}}_{S_{\{x\}}}(\neg x\neg y) = \neg x$ となる．状態空間 $S_{\{x\}}$ のみを認識する主体は y を認識することができず，真の状態が xy または $x\neg y$ の時は x と認識し，真の状態が $\neg xy$ または $\neg x\neg y$ の時は $\neg x$ と認識する．ここで HMS-state space は $\Sigma = S_{\{x,y\}} \cup S_{\{x\}} \cup S_{\{y\}} \cup S_{\{\phi\}}$ である．対照的に標準的な状態空間は $S_{\{x,y\}}, S_{\{x\}}, S_{\{y\}}, S_{\{\phi\}}$ それぞれである．Fig. 1 はこれを図であらわしたものである．■

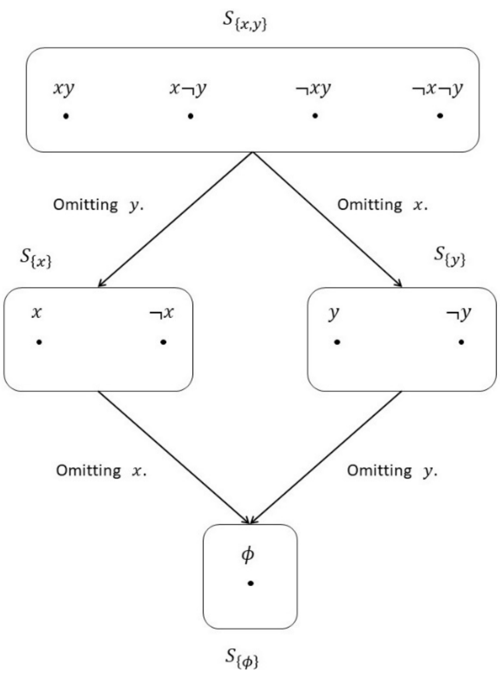

Fig. 1: HMS-state space.

2-2　Li-state space

続いて Li (2009) が定義した Li-state space，を定式化する．まず質問集合 Q^* をとる．任意の $q \in Q^*$ に対して，$A_q = \{a_q, \neg a_q\}$ は q に対する解答集合とする．ここで，カーテシアン直積集合 $\prod_{q\in Q^*} A_q$ は客観的状態空間であるとする．そして任意の部分集合 $Q \subseteq Q^*$ に対して，カーテシアン直積集合 $\prod_{q\in Q} A_q$ は主観的状態空間であるとする．任意の異なる状態空間 $A, A' \in \{\prod_{q\in Q} A_q | Q \subseteq Q^*\}$ は互いに素なのは明らである．任意の $Q' \subseteq Q \subseteq Q^*$ に

対して，全射の射影 $r^{Q}_{Q'}\colon \prod_{q\in Q}A_q \longrightarrow \prod_{q\in Q'}A_q$ が存在するものとする．この時，任意の $\omega \in \prod_{q\in Q}A_q$ に対して，$r^{Q}_{Q'}(\omega) \in \prod_{q\in Q'}A_q$ である．Li-state space は状態空間の合併 $\mathcal{A} = \bigcup_{Q\subseteq Q^*}\prod_{q\in Q}A_q$ で表される．Li-state space において標準的な状態空間は $\mathcal{A}$ ではなく，互いに素なそれぞれの各状態空間となっている．言い換えると Li-state space $\mathcal{A}$ は互いに素な標準的な状態空間の合併である．

Example 2　質問集合 $Q^* = \{q(x), q(y)\}$ を取り出す．$q(x)$ は x についての質問であり，$q(y)$ は y についての質問であるとする．これに対して，それぞれの解答集合は $A_{q(x)} = \{a_{q(x)}, \neg a_{q(x)}\}$，$A_{q(y)} = \{a_{q(y)}, \neg a_{q(y)}\}$ となる．x を取った時，$a_{q(x)}$ は「質問 $q(x)$ に対する解答が "yes" である」と解釈し，$\neg a_{q(x)}$ は「質問 $q(x)$ に対する解答が "no" である」と解釈する．この時，客観的状態空間は $A_{q(x)} \times A_{q(y)}$ であり，主観的状態空間は $A_{q(x)}$，$A_{q(y)}$，$A_{q(\phi)}$ の 3 つである．$\{q(x)\} \subseteq Q^*$ を取り出した時，全射の射影 $r^{Q^*}_{\{q(x)\}}\colon A_{q(x)} \times A_{q(y)} \longrightarrow A_{q(x)}$ が存在し，$r^{Q^*}_{\{q(x)\}}(a_{q(x)}, a_{q(y)}) = r^{Q^*}_{\{q(x)\}}(a_{q(x)}, \neg a_{q(y)}) = a_{q(x)}$，$r^{Q^*}_{\{q(x)\}}(\neg a_{q(x)}, a_{q(y)}) = r^{Q^*}_{\{q(x)\}}(\neg a_{q(x)}, \neg a_{q(y)}) = \neg a_{q(x)}$ が成立する．ここで質問 $q(x)$ のみを認識している主体は，$(a_{q(x)}, a_{q(y)})$ または $(a_{q(x)}, \neg a_{q(y)})$ が真の状態である時，$a_{q(x)}$ のみを認識し，$(\neg a_{q(x)}, a_{q(y)})$ または $(\neg a_{q(x)}, \neg a_{q(y)})$ が真の状態である時，$\neg a_{q(x)}$ のみを認識しているものと考える．この時, Li-state space は $\mathcal{A} = A_{q(x)} \times A_{q(y)} \cup A_{q(x)} \cup A_{q(y)} \cup A_{q(\phi)}$ となる．対照的に標準的な状態空間は $A_{q(x)} \times A_{q(y)}, A_{q(x)}, A_{q(y)}, A_{q(\phi)}$ それぞれである．Fig. 2 はこれを図であらわしたものである．■

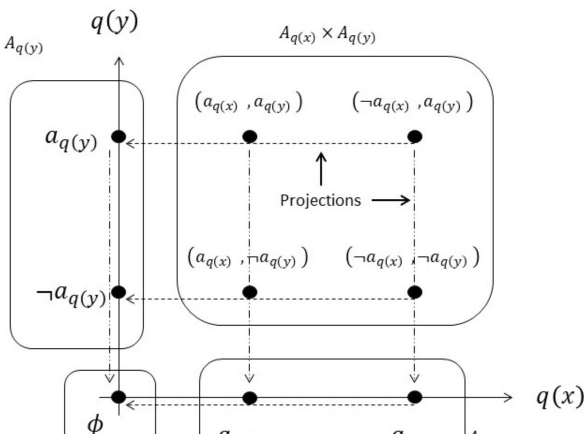

Fig. 2: Li-state space.

Ⅲ　Constructive State Space

標準的な状態空間は各状態が互いに素で独立なものと考える．例えばサイコロの場合，1 から 6 までのそれぞれの目は互いに何の関連もない．しかし，unawareness structure では，各状態が多属性の性質を兼ね備えており，各状態空間上の状態は別の状態空間上の状態と相関している．この束としての性質を標準的な状態空間に当てはめた場合，我々は Heifetz et al. (2006）や Li (2009）とは異なる方法で標準的な状態空間上で unawareness を議論できるはずである．そこで本節では，完備束であるような状態空間を定義する．

3-1　関数の多重定義

Constructive state space の定義に入る前に、我々はまず関数の多重定義について定義する.[5] 2 つの集合 X, Y を取り出す．そして任意の $k = 0, 1, \cdots, n$ に対して，X_k を以下のように定義する:

$$X_k = \begin{cases} \emptyset & \text{if } k = 0 \\ \times_k X & \text{otherwise;} \end{cases}$$

この時，我々は関数の多重定義を以下のように定義する．

Definition of overloaded functions: 関数 f が $n+1$ 組のアリティ $(0, 1, \cdots, n)$ で多重定義されているとは，f が以下のように定義されていることである:

$$f\colon \bigcup_{k=0}^{n} X_k \to Y.$$

3-2　多重定義された演算子と Constructive State Space

我々のモデルは Li (2009）のように構成法的に状態空間を定義する．まず基本命題集合 P をとる．ここで 3 組のアリティ $(0, 1, 2)$ によって多重定義された演算子 $\vee$ を取り出し，以下の条件を満たすものとする．

C1　任意の $p \in P$ に対して，$p\vee = \vee p = p \vee p = p$.

C2　$\vee = \phi$.

[5] 多重定義はプログラミングの分野で使われている単語であるが、我々はこの単語を今後の議論のために拝借することにする。

C3　任意の $p, p' \in P$ に対して，$p \vee p' = p' \vee p$.

C4　任意の $p, p', p'' \in P$ に対して，$p \vee (p' \vee p'') = (p \vee p') \vee p''$.

C1 は $\vee$ が任意の基本命題 p と“空”とを関係づけるとき，あるいは p 自身と関係づける時（冪等律），それは命題 p それ自体を導く事を意味する．C2 は $\vee$ の両側が空である場合には，ϕ と記す事を意味する．C3 は演算子の交換律を，C4 は演算子の吸収律が成立していることを意味する．ここで任意の基本命題の部分集合 $X \subseteq P$ に対して，$\bigvee_{p \in X} p$ を状態とし，$\Omega = \left\{ \bigvee_{p \in X} p \,\middle|\, X \subseteq P \right\}$ は状態空間であり，任意の部分集合 $X \subseteq P$ に対して，$\Omega_X = \left\{ \bigvee_{p \in Y} p \,\middle|\, Y \subseteq X \right\}$ もまた状態空間である．

ここで $Y \subseteq X \subsetneq P$ に対して，$\bigvee_{p \in Y} p \in \Omega$ かつ $\bigvee_{p \in Y} p \in \Omega_X$ が成立することは明らかである．しかしながら，Ω における $\bigvee_{p \in Y} p$ と Ω_X における $\bigvee_{p \in Y} p$ はその意味するところが異なる．Ω における $\bigvee_{p \in Y} p$ は $p' \in P \setminus Y$ が構成されていないことを意味している．しかし Ω_X における $\bigvee_{p \in Y} p$ は $p' \in X \setminus Y$ が構成されていないこと意味しているが，同時に $p'' \in P \setminus X$ が構成されていないことについてはその意味を含めていない．Ω_X における $\bigvee_{p \in Y} p$ は Ω_X 上の各状態との間で関係をもち，かつその関係の中でのみ意味を持つのであって，$\Omega \setminus \Omega_X$ 上の各要素とは関係を持たず，従ってそれらとの関係の中で意味を持つことはないのである．この特徴は圏論における議論に近いものがあるであろう．我々の状態空間は圏論的な考えが含まれていると言える.[6]

続いて射影を定義する．任意の 2 つの基本命題の部分集合 $X, Y \subseteq P$ に対して，射影 $r_Y^X : \Omega_X \longrightarrow \Omega_Y$ が存在する．r_Y^X は全射でなくても良い．この時，全ての $\bigvee_{p \in Z :\, Z \subseteq X} p \in \Omega_X$ に対して，$r_Y^X \left(\bigvee_{p \in Z :\, Z \subseteq X} p \right) = \bigvee_{p \in Z \cap Y :\, Z \subseteq X} p \in \Omega_Y$ が成り立つ．我々は射影の合成も考えることができる．任意の $Y \subseteq X \subseteq P$ に対して，$r_Y^X \circ r_X^P = r_Y^P$ とする．ここで $\bigvee_{p \in Z :\, Z \subseteq P} p = \omega$ と記した時，任意の $X \subseteq P$ と $\omega \in \Omega$ に対して，$r_X^P(\omega) = \omega_X$ と記す．また任意の $X \subseteq P$ と $\omega \in \Omega_X$ に対して，$r_X^X(\omega) = \omega$ とする．

このように定義された Ω は完備束の性質を備えた状態空間である．我々はこれを constructive state space と呼ぶ．そして任意の部分集合 $X \subseteq P$ に対して，Ω_X を主観的状態空間と呼ぶ.

Remark 1　全ての部分集合 $Y \subseteq X \subseteq P$ に対して，$\Omega_Y \subseteq \Omega_X$.

Proof. 任意の部分集合 $Y \subseteq X \subseteq P$ をとる．この時，$Z \subseteq Y$ であるような Z が存在する．これは $Z \subseteq X$ を明らかに満たす．従って，任意の $\bigvee_{p \in Z :\, Z \subseteq Y} p \in \Omega_Y$ に対して，$\bigvee_{p \in Z :\, Z \subseteq Y} p = \bigvee_{p \in Z :\, Z \subseteq X} p \in \Omega_X$ であるので，$\Omega_Y \subseteq \Omega_X$．■

---

[6] 演算子 $\vee$ のこのような特徴は瀧澤弘和教授に指摘された．教授に感謝を述べる．

Remark 1 は Heifetz et al. (2006) や Li (2009) とは異なり，主観的状態空間は互いに素ではないことを意味している．この特徴は unawareness structure とは明らかに異なる．また任意の異なる状態空間を取り出した時，必ず共通部分が存在し，その要素には必ず ϕ が含まれていることは明らかである．

我々の構成法は Heifetz et al. (2008) に近い．しかし彼らのモデルにおける状態空間と我々のモデルにおける状態空間は一致しない．彼らのモデルにおける原始命題と我々のモデルにおける基本命題は対応しているかもしれないが，我々の状態空間は彼らのモデルにおける言語に対応し，彼らの状態空間は我々のモデルにおけるボレル集合体に対応している．言い換えると，彼らの状態は“分割の要素”を意味し，状態空間は“分割の集合”を意味する．Table. 1 はこの違いを表にしたものである．もちろん，言語を基本命題の集合と考えた場合には，彼らの状態空間と constructive state space は対応関係にあるということができる．従って，Heifetz et al. の状態空間を“状態の集合”とするか“分割の集合”とするかは解釈の問題であると言えるかもしれない．しかし、彼らのモデルでは各主観的状態空間にラベルを貼り、その集合を完備束として定義している．対照的に我々は状態空間を完備束と扱っているが，各主観的状態空間については，Remark 1 で示したように客観的状態空間の部分集合のまま扱っている．従って，知識演算子や unawareness 演算子の定義域にも違いが現れる．これは一見大きな差異ではないように思えるかもしれないが，次節で証明するように，non-trivial unawareness と Symmetry との両立性について，前者は Symmetry を公理としているのに対して，我々は両立しないことを証明している．この差異は我々のモデルと HMS's canonical model との間に潜在的な差があることを示している．

HMS's canonical models	Our models
原子命題（primitive proposition）	基本命題（basic proposition）
言語（language）	Constructive state space
状態空間（state space）	ボレル集合体（Borel field）

Table. 1: Relationship between HMS's canonical models and our models

Example 3　基本命題集合を $P = \{x, y\}$ とし，状態空間を $\Omega = \{x \vee y, x, y, \phi\}$，$\Omega_{\{x\}} = \{x, \phi\}$，$\Omega_{\{y\}} = \{y, \phi\}$，$\Omega_{\{\phi\}} = \{\phi\}$ と置く．各状態空間は Ω の部分集合である．射影は全射でなくても良いので，基本命題の部分集合 $\{x\}$，$\{y\}$ を取り出した時，$r^{\{x\}}_{\{y\}}(x) = r^{\{x\}}_{\{y\}}(\phi) = \phi$ となる．各部分集合に対してその共通部分が ϕ を要素に持つことは明らかである．こ

の時，Ω は完備束を伴った状態空間であり，我々が constructive state space と呼ぶものである. Fig. 3 はこれを図で示したものである.

ここで状態 ϕ について考えよう. $\phi \in \Omega$ の時，状態 ϕ は状態 $x \vee y, x, y$ のいずれでもないことを意味しているだけでなく，基本命題について x, y のいずれからも構成されていないことを意味している. 対照的に，$\phi \in \Omega_{\{x\}}$ の時，状態 ϕ は状態 x ではないことしか含まれておらず，同時に基本命題 x が含まれていないことしか意味しない. y に関わる情報は $\Omega_{\{x\}}$ 上の ϕ には含まれていないのである. すなわち各状態が属している状態空間によって，同じ状態であってもその意味することは変わってくる. ■

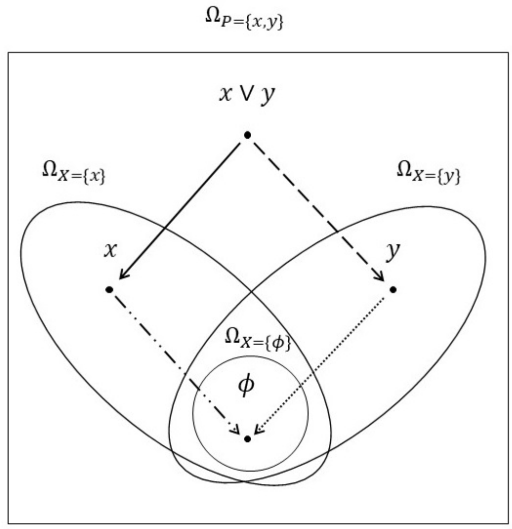

Fig. 3: Constructive state space.

3-3　他の状態空間との関連性

我々が定義した constructive state space と HMS-state space, Li-state space それぞれとの関係は以下の 2 つの補題で示される.

Lemma 1　The followings are equivalent:

1. A constructive state space can be constructed.
2. An HMS-state space can be constructed.

Proof. (1⟹2) 任意の constructive state space Ω は基本命題集合 P を持ち，任意の部分集合 $X \subseteq P$ に対して，$\Omega_X = \left\{\bigvee_{p\in Y} p \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}$ が存在する．ここで互いに素な集合族 $\mathcal{S}$ と全単射の写像 $f: \{\Omega_X | X \subseteq P\} \longrightarrow \mathcal{S}$ を定義する．この時，任意の $X, Y \subseteq P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $f(\Omega_X) \cap f(\Omega_Y) = \emptyset$ が成り立つ．$\mathcal{S}$ 上の半順序 $\preccurlyeq$ を次のように定義する: $X \subseteq Y$ ならば，$f(\Omega_X) \preccurlyeq f(\Omega_Y)$．これが成り立つ時，全射の射影 $r^{\Omega_Y}_{\Omega_X}: \Omega_Y \longrightarrow \Omega_X$ をとる．このように定義された $\mathcal{S} = \{f(\Omega_X) | X \subseteq P\}$ は完備束であり，$\Sigma = \bigcup_{X\subseteq P} f(\Omega_X)$ は HMS-state space を構成する．

(2⟹1) 任意の HMS-state space Σ は互いに素な完備束 $\mathcal{S} = \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を持つ．ここで $\mathcal{S}^{minmal} = \left\{S \in \mathcal{S} \,\middle|\, S \; is \; minimal \; element \; on \; \mathcal{S} \setminus \{\emptyset\}\right\}$ を定義する．さらにある集合 P と全単射の写像 $\hat{f}: \mathcal{S}^{minmal} \longrightarrow P$ を取り，多重定義された演算子 $\vee$ が次の条件を満たすものとする．

- 任意の $S \in \mathcal{S}^{minmal}$ に対して，$\hat{f}(S) \vee = \vee \hat{f}(S) = \hat{f}(S) \vee \hat{f}(S) = \hat{f}(S)$.
- $\vee = \emptyset$.
- 任意の $S, S' \in \mathcal{S}^{minmal}$ に対して，$\hat{f}(S) \vee \hat{f}(S') = \hat{f}(S') \vee \hat{f}(S)$.
- 任意の $S, S', S'' \in \mathcal{S}^{minmal}$ に対して，$\hat{f}(S) \vee \left(\hat{f}(S') \vee \hat{f}(S'')\right) = \left(\hat{f}(S) \vee \hat{f}(S')\right) \vee \hat{f}(S'')$.

この時，任意の部分集合 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}^{minmal}$ に対して，$\Omega_{\mathcal{X}} = \left\{\bigvee_{S\in\mathcal{X}} \hat{f}(S) \,\middle|\, \mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}^{minmal}\right\}$．さらに任意の $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{S}^{minmal}$ に対して，射影 $r^{\mathcal{X}}_{\mathcal{Y}}: \Omega_{\mathcal{X}} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{Y}}$ を取り，全ての $\bigvee_{S\in\mathcal{Z}:\, \mathcal{Z}\subseteq\mathcal{X}} S$ に対して，$r^{\mathcal{X}}_{\mathcal{Y}}(\bigvee_{S\in\mathcal{Z}:\, \mathcal{Z}\subseteq\mathcal{X}} S) = \bigvee_{S\in\mathcal{Z}\cap\mathcal{Y}:\, \mathcal{Z}\subseteq\mathcal{X}} S$ と定義する．このように定義された $P = \left\{\hat{f}(S) \,\middle|\, S \in \mathcal{S}^{minmal}\right\}$ は基本命題集合であり，$\Omega = \left\{\bigvee_{S\in\mathcal{X}} \hat{f}(S) \,\middle|\, \mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}^{minmal}\right\}$ は constructive state space である．■

Lemma 2 The followings are equivalent:

1. A constructive state space can be constructed.
2. A Li-state space can be constructed.

Proof. (1⟹2) 任意の constructive state space Ω は基本命題集合 P を持ち，任意の部分集合 $X \subseteq P$ に対して，$\Omega_X = \left\{\bigvee_{p\in Y} p \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}$ が存在する．ここである集合 Q^* と全単射の写像 $g: P \longrightarrow Q^*$ を取る．この時，任意の $p, p' \in P$ に対して，$g(p) \neq g(p')$ である．さらに任意の $p \in P$ に対して，集合 $A_{g(p)} = \left\{a_{g(p)}, \neg a_{g(p)}\right\}$ を定義し，任意の $X \subseteq P$ に対して，カーテシアン直積集合 $\prod_{p\in X} A_{g(p)}$ をとる．ここで任意の $X, Y \subseteq P$ に対して，$\prod_{p\in X} A_{g(p)} \neq \prod_{p\in Y} A_{g(p)}$ は明らかである．$Y \subseteq X$ の時，全射の射影 $r^{\mathrm{X}}_{\mathrm{Y}}: \prod_{p\in X} A_{g(p)} \longrightarrow \prod_{p\in Y} A_{g(p)}$ を定義する．このように定義された $\{g(p) | p \in P\}$ は質問集合であり，$\mathcal{A} = \bigcup_{X\subseteq P} \prod_{p\in X} A_{g(p)}$ は Li-state space である．

(2⟹1) 任意の Li-state space $\mathcal{A}$ は質問集合 Q^* を持つ．ここである集合 P と全単射

の写像 $\hat{g}: Q^* \longrightarrow P$ をとる．この時，任意の $q, q' \in Q^*$ に対して，$q \neq q'$ ならば，$\hat{g}(q) \neq \hat{g}(q')$ は明らかである．多重定義された演算子 $\vee$ が次の条件を満たすものとする．

- 任意の $q \in Q^*$ に対して，$\hat{g}(q) \vee = \vee\, \hat{g}(q) = \hat{g}(q) \vee \hat{g}(q) = \hat{g}(q)$.
- $\vee = \emptyset$.
- 任意の $q, q' \in Q^*$ に対して，$\hat{g}(q) \vee \hat{g}(q') = \hat{g}(q') \vee \hat{g}(q)$.
- 任意の $q, q', q'' \in Q^*$ に対して，$\hat{g}(q) \vee \big(\hat{g}(q') \vee \hat{g}(q'')\big) = \big(\hat{g}(q) \vee \hat{g}(q')\big) \vee \hat{g}(q'')$.

この時，任意の $Q \subseteq Q^*$ に対して，$\Omega_Q = \left\{\bigvee_{q \in Q} \hat{g}(q) \,\middle|\, Q \subseteq Q^*\right\}$ を定義する．また任意の $Q, Q' \subseteq Q^*$ に対して，射影 $r^Q_{Q'}: \Omega_Q \longrightarrow \Omega_{Q'}$ をとり，全ての $\bigvee_{q \in Q'' :\, Q'' \subseteq Q} \hat{g}(q) \in \Omega_Q$ に対して，$r^Q_{Q'}\big(\bigvee_{q \in Q'' :\, Q'' \subseteq Q} \hat{g}(q)\big) = \bigvee_{q \in Q'' \cap Q' :\, Q'' \subseteq Q} \hat{g}(q)$ と定義する．このように定義された $P = \{\hat{g}(q) | q \in Q^*\}$ は基本命題集合であり，$\Omega = \left\{\bigvee_{q \in Q} \hat{g}(q) \,\middle|\, Q \subseteq Q^*\right\}$ は constructive state space である．■

2 つの補題の証明は constructive Aumann-state space から HMS-state space と Li-state space を構成することができ，かつ逆からも構成することができることを示している．以上より以下の命題が導かれる．

Proposition 1　以下の性質は同値である．

1. Constructive state space を構築することができる．
2. HMS-state space を構築することができる．
3. Li-state space を構築することができる．

Constructive state space について，HMS-state space と関連づけて再度考察しよう．Example 2 と Example 3 を比較する．HMS-state space 上の状態空間と constructive state space 上の状態空間は次のように関連づけられている:

$$S_{\{x,y\}} \iff \Omega;$$
$$S_{\{x\}} \iff \Omega_{\{x\}};$$
$$S_{\{y\}} \iff \Omega_{\{y\}};$$
$$S_{\{\phi\}} \iff \Omega_{\{\phi\}}.$$

$S_{\{x,y\}}$ と Ω に注目した時，それぞれの状態空間における各状態は以下のように対応している:

$$xy \iff x \vee y;$$

$$
\begin{aligned}
x\neg y &\Leftrightarrow x;\\
\neg xy &\Leftrightarrow y;\\
\neg x\neg y &\Leftrightarrow \phi.
\end{aligned}
$$

これに対して $S_{\{x\}}$ と $\Omega_{\{x\}}$ に注目した時，それぞれの状態空間における各状態は以下のように対応している：

$$
\begin{aligned}
x &\Leftrightarrow x;\\
\neg x &\Leftrightarrow \phi.
\end{aligned}
$$

この対応関係を見た時，Ω 上の x と $\Omega_{\{x\}}$ 上の x が異なる意味を持ち，Ω 上の ϕ と $\Omega_{\{x\}}$ 上の ϕ が異なる意味を持つことが理解できるだろう．x と ϕ は y との間に関係を持っているのか，持っていないのかによって，$\neg y$ を意味しているのかどうかが変わってくるのである．

同時に，Ω は $\Sigma = S_{\{x,y\}} \cup S_{\{x\}} \cup S_{\{y\}} \cup S_{\{\phi\}}$ との関係の中で，各要素が次のように関連づけられている：

$$
\begin{aligned}
xy &\Leftrightarrow x \vee y;\\
x &\Leftrightarrow x;\\
y &\Leftrightarrow y;\\
\phi &\Leftrightarrow \phi.
\end{aligned}
$$

すなわち，constructive state space Ω は HMS-state space Σ との間に二重の部分集合の意味を持ち合わせているのである．言い換えれば Ω は二重構造となっている．一つは Σ 上の客観的状態空間と関連づけられ，もう一つは Σ 上の否定演算子を取り除いた状態の集合と関連づけられている．すなわち Constructive state space 上の各状態は，HMS-state space 上の客観的状態空間と関連づけられながら，同時に HMS-state space 上の互いに素な各状態空間と関連づけられているのである．

Ⅳ　Constructive Aumann Structure

以下では完備束であるような状態空間，constructive state space に焦点を当て，単一主体に限定し，constructive Aumann structure について議論する．我々は可能性対応，知識演算子，unawareness 演算子をそれぞれ定式化すると同時にそれぞれの性質について議論する．本節の最後には Dekel et al. (1998) の主要定理と Chen et al. (2012) の主要定理をより一

般化したものを提示する．

4-1　可能性対応

標準的な Aumann structure では可能性対応の定義域は状態空間のみであるが，本稿は状態空間を束と捉えているので，状態空間と基本命題の部分集合との直積集合が定義域となる．まず $\langle P, \Omega, \Pi\rangle$ を constructive Aumann structure と呼ぼう．この時，可能性対応は $\Pi: \Omega \times 2^{\mathrm{P}} \longrightarrow 2^{\Omega} \setminus \{\emptyset\}$ で定義される．任意の $\omega \in \Omega$ と全ての $X \subseteq P$ に対して, 主観的状態空間 X を認識している主体は ω を与えられた時の情報集合が $\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega$ であると考える．この時，可能性対応は以下の性質を備えていると仮定する．

1. Subjective Nondelusion: 全ての $\omega \in \Omega$ と全ての $X \subseteq P$ に対して，$\omega_X \in \Pi(\omega, X)$.
2. Stationarity: 任意の $\omega, \omega' \in \Omega$ と $X \subseteq P$ に対して，$\omega' \in \Pi(\omega, X)$ ならば $\Pi(\omega', X) = \Pi(\omega, X)$.

Example 3 を例にとろう．主体は基本命題の部分集合 $X = \{x\}$ を認識しているとし，constructive state space を $\Omega = \{\omega_1 = x \vee y, \omega_2 = x, \omega_3 = y, \omega_4 = \phi\}$ と記す．このとき，仮定 1 は各 $\omega \in \Omega$ に対して，$\omega_2 \in \Pi(\omega_1, X)$，$\omega_2 \in \Pi(\omega_2, X)$，$\omega_4 \in \Pi(\omega_3, X)$，$\omega_4 \in \Pi(\omega_4, X)$ が成り立つことを仮定する．仮定 2 は $\omega_2 \in \Pi(\omega_1, X)$ が成り立つならば，$\Pi(\omega_2, X) = \Pi(\omega_1, X)$ が成り立つことを仮定する．この 2 つの仮定は標準的な，そして分割的な Aumann structure において仮定されている性質を我々のモデルで一般化したものである．X が P の真部分集合であるとき，Π が Ω 上で分割的にならない，すなわち Π が Ω 上で非分割であることは明らかだろう．しかし，Ω_X 上に限定した場合には，分割的になることは予想がつく．そこで我々は部分的な分割を以下のように定義する．

Definition 1 (Partial Partition) $X \subseteq P$ をとる．可能性対応 $\Pi: \Omega \times 2^{\mathrm{P}} \longrightarrow 2^{\Omega} \setminus \{\emptyset\}$ が Ω_X に対して部分的に分割的であるとは，以下の条件を満たす $\mathcal{P} = \{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在することである:

1. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda = \Omega_X$
2. 任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\omega_X \in P_\lambda$ かつ $\Pi(\omega, X) = P_\lambda$ となる P_λ が存在する．
3. 全ての $P_\lambda, P'_\lambda \in \mathcal{P}$ に対して，$P_\lambda \neq P'_\lambda$ ならば $P_\lambda \cap P'_\lambda = \emptyset$.

$X = P$ の時，部分的な分割は標準的な Aumann structure における分割と一致する．そして標準的な Aumann structure と同様に部分的分割は Subjective Nondelusion と

Stationarity と同値である．

Proposition 2　任意の $X \subseteq P$ をとる．可能性対応 Π が Ω_X に対して分割的であることの必要十分条件は Π が Subjective Nondelusion と Stationarity を満たすことである．

Proof. ($\Longrightarrow$) 可能性対応 Π が Ω_X に対して分割的であると仮定する．この時, Definition 1-2 より，任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\omega_X \in P_\lambda$ となる P_λ が存在し，かつ $\Pi(\omega, X) = P_\lambda$ であるから，$\omega_X \in \Pi(\omega, X)$ が成立する．従って Subjective Nondelusion が成立する．任意の $P_\lambda, P'_\lambda \in \mathcal{P}$ に対して，$\omega \in P_\lambda, \omega' \in P'_\lambda$ とし，$P_\lambda \neq P'_\lambda$ と仮定する．この時, Definition 1-3 より，$P_\lambda \cap P'_\lambda = \emptyset$ である．Definition 1-2 より，$\Pi(\omega, X) \neq \Pi(\omega', X)$ ならば $\Pi(\omega, X) \cap \Pi(\omega', X) = \emptyset$ と置き換えられ，$\omega' \notin \Pi(\omega, X)$ である．この待遇を取ると，$\omega' \in \Pi(\omega, X)$ ならば $\Pi(\omega', X) = \Pi(\omega, X)$ である．従って Stationarity が成立する．

($\Longleftarrow$) Π が Subjective Nondelusion と Stationarity を満たすと仮定する．任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\Pi(\omega, X) = P_\lambda$ となるように P_λ をとる. Subjective Nondelusion と射影の仮定から，全ての $\omega \in \Omega_X$ に対して $\omega \in \Pi(\omega, X)$ が成立する．従って，$\bigcup_{\omega \in \Omega_X} \Pi(\omega, X) = \bigcup_{\lambda : P_\lambda = \Pi(\omega, X)} P_\lambda = \Omega_X$ は明らかである．すなわち, Definition 1-1 が成立する．同時に Subjective Nondelusion と P_λ の定義から Definition 1-2 が成立する. Stationarity より，任意の $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して，$\Pi(\omega, X) \neq \Pi(\omega', X)$ ならば $\omega' \notin \Pi(\omega, X)$ である．これは $\Pi(\omega, X) \cap \Pi(\omega', X) = \emptyset$ を意味する．P_λ の定義より，$P_\lambda \neq P'_\lambda$ ならば $P_\lambda \cap P'_\lambda = \emptyset$ が成立すると言える．従って, Definition 1-3 が成立する．以上より Π は Ω_X に対して分割的である．
■

Heifetz et al. (2006) では可能性対応の仮定として, Stationarity, Confinedness, Generalized Reflexivity, Projections Preserve Awareness, Projections Preserve Ignorance, Projections Preserve Knowledge の 6 つの仮定を設け, Subjective Nondelusion については仮定していなかった．しかし, Confinedness, Generalized Reflexivity, Projections Preserve Awareness, Projections Preserve Knowledge については Subjective Nondelusion と Stationarity から証明可能である．証明に入る前に，事象について次のように記す．$E \subseteq \Omega$ を Ω 上の事象とする．この時，任意の $X \subseteq P$ に対して，$E_X = \{\omega_X \in \Omega | \omega \in E\}$，$E^X = \left\{\omega' \in \Omega \middle| \forall \omega \in E \quad \omega' = \omega \vee_{p \in Z : Z \subseteq X} p\right\}$ とする．

Remark 2　If a possibility correspondence Π satisfies Subjective Nondelusion and Stationarity, then it satisfies the followings.

1. Confinedness: For any $\omega \in \Omega_X$ and any $X \subseteq P$, $\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_X$.
2. Generalized Reflexivity: For any $\omega \in \Omega$ and $X \subseteq P$, $\omega \in \left(\Pi(\omega, X)\right)^P$.
3. Projections Preserve Awareness: For any $\omega \in \Omega$ and $X \subseteq P$, if $\omega \in \Pi(\omega, X)$, then $\omega_X \in \Pi(\omega_X, X)$.
4. Projections Preserve Knowledge: For any $\omega \in \Omega$ and $X, Y \subseteq P$, if $\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_Y$, then $\left(\Pi(\omega, X)\right)_Y = \Pi(\omega_Y, X)$.

Proof.（性質 1）Subjective Nondelusion より，$\omega_X \in \Pi(\omega, X)$．Stationarity より，$\omega' \in \Pi(\omega, X)$ ならば，$\Pi(\omega', X) = \Pi(\omega, X)$．すなわち，$\omega'_X = \omega'$．従って，任意の $\omega' \in \Pi(\omega, X)$ に対して，$\omega' \in \Omega_X$．以上から，$\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_X$．

（性質 2）任意の $\omega \in \Omega$ と $X \subseteq P$ をとる．この時，$\left(\Pi(\omega, X)\right)^P = \{\omega'' \in \Omega \mid \forall \omega' \in \Pi(\omega, X) \quad \omega'' = \omega' \vee_{p \in Z: Z \subseteq X} p\}$. Subjective Nondelusion より，$\omega_X \in \Pi(\omega, X)$ であるから，$\omega = \omega_X \vee_{p \in Z} p$ であるような $Z \subseteq X$ が存在する．従って，$\omega \in \left(\Pi(\omega, X)\right)^P$．

（性質 3）Subjective Nondelusion から明らかである．

（性質 4）任意の $\omega \in \Omega$，$X, Y \subseteq P$ に対して，$\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_Y$ と仮定する．任意の $\omega' \in \Pi(\omega, X)$ に対して，$\omega' \in \Omega_Y$ であるから，$r_Y^X(\omega') = \omega'$．すなわち，$\left(\Pi(\omega, X)\right)_Y = \Pi(\omega, X)$．従って, Subjective Nondelusion と Stationarity から，$\Pi(\omega_Y, X) = \Pi(\omega_X, X) = \Pi(\omega, X)$．■

なお Heifetz et al.（2006）では，性質 2 から Subjective Nondelusion を導き，性質 1 と性質 4 から性質 3 を導いた．

Remark 3（Heifetz et al. 2006）可能性対応 Π は以下の性質を満たす．

A） Generalized Reflexivity implies Nondelusion.

B） Confinedness and Projections Preserve Knowledge implies Projections Preserve Awareness.

Proof.（A）Π が Generalized Reflexivity を満たすと仮定する．すなわち，任意の $\omega \in \Omega$，$X \subseteq P$ に対して，$\omega \in \left(\Pi(\omega, X)\right)^P$．この時，$\left(\Pi(\omega, X)\right)^P = \{\omega'' \in \Omega \mid \forall \omega' \in \Pi(\omega, X) \quad \omega'' = \omega' \vee_{p \in Z: Z \subseteq X} p\}$．従って，$\omega = \omega' \vee_{p \in Z: Z \subseteq X} p$ であるような $\omega' \in \Pi(\omega, X)$ が存在しなくてはならない．すなわち，$r_X^Y(\omega) = r_X^Y\left(\omega' \vee_{p \in Z: Z \subseteq P} p\right) = \omega'$．以上から，$\omega_X \in \Pi(\omega, X)$.

（B）Π が Confinedness と Projections Preserve Knowledge を満たすと仮定する．すなわち，任意の $\omega \in \Omega_X$，$X \subseteq P$ に対して，$\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_X$，かつ任意の $\omega \in \Omega$，$X, Y \subseteq P$ に対して，$\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_Y$ ならば，$\left(\Pi(\omega, X)\right)_Y = \Pi(\omega_Y, X)$. Remark 2 の性質 4 の証明より，任意

の $\omega \in \Omega$ に対して，$\left(\Pi(\omega, X)\right)_Y = \Pi(\omega, X)$. ここで $Y = X$ と記す．$\omega \in \Pi(\omega, X)$ を仮定する．この時，$\omega \in \Pi(\omega_X, X)$. 射影の定義から，$\omega_X = \omega$ であるので，$\omega_X \in \Pi(\omega_X, X)$. ■

Heifetz et al. (2006) が仮定した Projections Preserve Ignorance は次のように定式化されている：任意の $\omega \in \Omega$, $X, Y \subseteq P$ に対して，$\left(\Pi(\omega, X)\right)^P \subseteq \left(\Pi(\omega_Y, X)\right)^P$. この性質は Subjective Nondelusion と Stationarity から導くことはできない．Projections Preserve Ignorance は状態空間上の分割を具体的に制約するための仮定である．しかしながら，本稿は単一主体モデルであるので，この仮定は必要ないように思われる．実際，以下では Projections Preserve Ignorance なしでも議論が可能となっている．また Heifetz et al. (2006) とは異なり，多属性を持った標準的な状態空間上で可能性対応を定義していることから，複数主体モデルにおいても必要のない仮定であるように思われる.[7]

4-2　知識演算子

続いて知識演算子を定義しよう．まず事象 E を Ω の部分集合とする．主体が認識している基本命題集合が $X \subseteq P$ であるとき，知識演算子 $K_X: 2^\Omega \longrightarrow 2^\Omega$ を以下のように定義する：$E \subseteq \Omega_X$ であるならば，$K_X(E) = \{\omega \in \Omega | \Pi(\omega, X) \subseteq E\}$; そうでないならば，$K_X(E) = \emptyset$. $K_X(E)$ は「基本命題集合 X を認識している主体は事象 E を知っている」ことを意味する．$K_X(E) = \emptyset$ が成立しているとき，主体が E を知っていることは偽であることを意味する．Example 3 を例にとり，$X = \{x\}$，可能性対応が $\Pi(\omega_1, X) = \{\omega_2\}$，$\Pi(\omega_2, X) = \{\omega_2\}$，$\Pi(\omega_3, X) = \{\omega_4\}$，$\Pi(\omega_4, X) = \{\omega_4\}$ となることを仮定しよう．$E_1 = \{\omega_2\}$ としたとき，$E_1 \subseteq \Omega_X$ が成立し，かつ $\Pi(\omega_2, X) \subseteq E_1$，が成立する．従って，$K_X(E_1) = \{\omega_2\}$ が成立し，主体は E_1 を知っている．これに対して，$E_2 = \{\omega_1, \omega_2\}$ と置いたとき，$E_2 \nsubseteq \Omega_X$ であるから，$K_X(E_2) = \emptyset$ となる．従って，主体は E_2 を知っていることは偽になる．$E \subseteq \Omega_X$ の仮定は極めて重要である．$X \neq P$ の時，$\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega$ は明らかに成り立つ．従って $K_X(\Omega)$ が定義可能となり，X を認識している主体は Ω を知っていることを認めてしまうことになる．またこの仮定が成り立たないところでは，$X \neq P$ の場合でも Monotonicity が成立してしまい，我々の主要な分析を妨げてしまうことになる．なお $E \subseteq \Omega_X$ であったとしても，$K_X(E) = \emptyset$ となることがありうる．

Remark 4　任意の $E \subseteq \Omega_X$ に対して，以下の命題は同値である．

[7] この点は今後の研究課題として議論が必要となるであろう．

1. 任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\Pi(\omega, X) \nsubseteq E$.
2. $K_X(E) = \emptyset$.

Proof.（$1 \Rightarrow 2$）任意の $\omega \in \Omega$ と $E \subseteq \Omega$ に対して，$\Pi(\omega, X) \nsubseteq E$ と仮定する．この仮定は $\Pi(\omega, X) \subseteq E$ を満たす ω が存在しないことを意味する．従って，$K_X(E) = \emptyset$.

（$2 \Rightarrow 1$）任意の $E \subseteq \Omega$ に対して，$K_X(E) = \emptyset$ と仮定する．この仮定は $\Pi(\omega, X) \subseteq E$ を満たす ω が存在しないことを意味する．これは任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\Pi(\omega, X) \nsubseteq E$ が成立すると言い換えることができる．■

Example 3 を例にとり，$E_3 = \{\omega_4\}$ としたとき，$\Pi(\omega_2, X) \nsubseteq E_3$ となるから，$K_X(E_3) = \emptyset$ となり，ω_2 を与えられた主体は E_3 を知っていることは偽となる．

$K_X(E)$ が Ω_X 上の事象であることは明らかである．このことは Heifetz et al.（2006）において示されている．

Proposition 2 (Heifetz et al. 2006) 任意の $E \subseteq \Omega$ に対して，$K_X(E) \subseteq \Omega_X$.

Proof. 任意の $E \subseteq \Omega$ に対して，任意の $\omega \in K_X(E)$ をとる．知識演算子の定義と可能性対応の仮定 1 より，$\omega \in \Pi(\omega, X) \subseteq E$ である．この時, Confinedness より，$\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_X$ が成り立つから，$\omega \in \Omega_X$．従って，$K_X(E) \subseteq \Omega_X$．■

$K_X(E)$ の否定を $\neg K_X(E) = \Omega \setminus K_X(E)$ と定義する．これは「基本命題集合が X を認識している主体は事象 E について知らない」ことを意味する．

我々は Heifetz et al. (2006) で一般化された知識演算子の性質をより一般化した形で導くことができる．

Proposition 3 知識演算子 K_X は以下の性質を持つ．

K1 (Necessitation) $X = P$ if and only if $K_X(\Omega) = \Omega$.

K2 (Monotonicity) $X = P$ if and only if $E \subseteq F \Rightarrow K_X(E) \subseteq K_X(F)$.

K3 (Conjunction) $\forall \lambda \in \Lambda \quad E_\lambda \subseteq \Omega_X$ or $\forall \lambda \in \Lambda \quad E_\lambda \nsubseteq \Omega_X \Rightarrow K_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_X(E_\lambda)$.

K4 (Truth) $K_X(E) \subseteq E$.

K5 (Positive Introspection) $K_X(E) = K_X K_X(E)$.

K6 (Negative Introspection) $X = P$ if and only if $\neg K_X(E) \subseteq K_X \neg K_X(E)$.

Proof. (K1) ($\Longrightarrow$) $X = P$ の時, Nondelusion より，全ての $\omega \in \Omega$ に対して，$\omega \in \Pi(\omega, P) \subseteq \Omega$ である．すなわち，$\Omega \subseteq K_P(\Omega)$ である．また Proposition 2 より$K_P(E) \subseteq \Omega$ であるから $K_P(\Omega) = \Omega$.

($\Longleftarrow$) $K_X(\Omega) = \Omega$ と仮定する．$X \neq P$ を仮定する．この時, $\Omega_X \subsetneq \Omega$ である．しかし知識演算子の定義より，$K_X(\Omega) = \emptyset$ でなくてはならないので矛盾する．従って $X = P$ である．

(K2) ($\Longrightarrow$) $X = P$ の時, $K_P(E) = \{\omega \in \Omega | \Pi(\omega, P) \subseteq E\} \subseteq \{\omega \in \Omega | \Pi(\omega, P) \subseteq F\} = K_P(F)$.

($\Longleftarrow$) $E \subseteq F \Longrightarrow K_X(E) \subseteq K_X(F)$ を仮定する．$X \neq P$ の時, $\Omega_X \subsetneq \Omega$ であり，$K_X(\Omega) = \emptyset$ であるから，任意の $\emptyset \neq E \subseteq \Omega_X$ に対して，$K_X(E) \supsetneq K_X(\Omega)$ となり，矛盾する．従って $X = P$.

(K3) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $E_\lambda \subseteq \Omega_X$ を仮定する．任意の $\omega \in K_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda)$ をとる．この時, $\Pi(\omega, P) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ が成立している．これは全ての $\lambda \in \Lambda$ に対して，$\Pi(\omega, P) \subseteq E_\lambda$ であることを意味する．すなわち全ての $\lambda \in \Lambda$ に対して，$\omega \in K_X(E_\lambda)$ である．$\omega \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_X(E_\lambda)$. 次に任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $E_\lambda \nsubseteq \Omega_X$ を仮定する．その時, 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対して $K_X(E_\lambda) = \emptyset$ である．すなわち $K_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_X(E_\lambda) = \emptyset$ が成立する．

(K4) 任意の $\omega' \in K_X(E)$ をとる．$\omega' \in \Pi(\omega, P) \subseteq E$ が成立している．従って，$K_X(E) \subseteq E$.

(K5) 任意の $\omega' \in K_X(E)$ をとる．$\omega' \in \Pi(\omega, P) \subseteq E$ が成立している．ここで任意の $\omega'' \in \Pi(\omega, P)$ に対して，$\omega'' \in \Pi(\omega, P) \subseteq E$ が成立する．従って，$\omega'' \in K_X(E)$ が成立する．すなわち，$\Pi(\omega, P) \subseteq K_X(E)$. 従って，$\omega' \in K_X K_X(E)$. すなわち $K_X(E) \subseteq K_X K_X(E)$ ここで K4 より $K_X K_X(E) \subseteq K_X$ であるから，$K_X(E) = K_X K_X(E)$.

(K6) ($\Longrightarrow$) $X = P$ を仮定する．任意の $\omega \in \neg K_P(E)$ をとる．この時, $\omega \notin K_P(E)$ である．すなわち，$\Pi(\omega, P) \nsubseteq E$. ここで任意の $\omega' \in \Pi(\omega, P)$ をとる．この時, Stationarity より，$\Pi(\omega, P) = \Pi(\omega', P)$ が成立するので，$\omega' \in \neg K_P(E)$ が成立する．すなわち，$\Pi(\omega, P) \subseteq \neg K_P(E)$ が成立する．従って $\neg K_X(E) \subseteq K_X \neg K_X(E)$.

($\Longleftarrow$) $\neg K_X(E) \subseteq K_X \neg K_X(E)$ を仮定する．$X \neq P$ を仮定する．この時, $K_X(E) \subseteq \Omega_X \subsetneq \Omega$ となる．従って，$\neg K_X(E) \nsubseteq \Omega_X$ であるから，$K_X \neg K_X(E) = \emptyset$ でなくてはならない．これは矛盾する．従って $X = P$. ■

標準的な Aumann structure において unawareness の議論を阻害する性質となる Necessitation, Monotonicity, Negative Introspection が constructive Aumann structure においては基本命題を全て認識している場合にのみ成立し，またその逆も成り立っている．これは constructive Aumann structure において，$X \neq P$ であるならば, unawareness の議論を可能とすることを示唆している．

Remark 5　$K_X(\Omega_X) = \Omega_X$.

Proof. K4 より $K_X(\Omega_X) \subseteq \Omega_X$. 任意の $\omega \in \Omega_X$ をとる. この時, $\Pi(\omega, P) \subseteq \Omega_X$ は明らか. 従って $\omega \in K_X(\Omega_X)$. 従って $\Omega_X \subseteq K_X(\Omega_X)$ が成立するから $K_X(\Omega_X) = \Omega_X$. ■

これは自明のことであるが, X を認識している主体は Ω_X を標準的な Aumann structure と認識していると解釈することができる. これは Ω_X のみで定義された可能性対応を与えられた主体は通常の知識演算子の議論をそのまま Ω_X 上で当てはめることができることを意味する.[8]

最後に Heifetz et al. (2006) で K1 から K5 と共に一般化された以下の性質についても証明を行なう.

Proposition 4 (HMS 2006)　$\neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E) \subseteq \neg K_X \neg K_X \neg K_X(E)$.

Proof. $X = P$ の時, K6 より, $\neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E) = \emptyset$ なので成り立つ. $X \neq P$ と仮定する. K6 より, $\neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E) \neq \emptyset$. K4 より, $K_X \neg K_X(E) \subseteq \neg K_X(E)$ であるから, $K_X(E) \subseteq \neg K_X \neg K_X(E)$. これは $\neg K_X \neg K_X(E) \subseteq \neg K_X(E)$ を示すので, $K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E) \subseteq K_X(E) \cap \neg K_X(E) = \emptyset$. すなわち, $K_X(E) = \emptyset$. これはどの $E \subseteq \Omega$ に対しても成り立つ. 従って, $K_X(\Omega) = \emptyset$. $\neg K_X(E) = \Omega$ より, $K_X \neg K_X(E) = K_X(\Omega) = \emptyset$ であるから, $\neg K_X \neg K_X(E) = \Omega$. ここで, $K_X(\Omega) = K_X \neg K_X \neg K_X(E) = \emptyset$ が成り立つから, $\neg K_X \neg K_X \neg K_X(E) = \Omega$. すなわち, $\neg K_X(E) = \neg K_X \neg K_X(E) = \neg K_X \neg K_X \neg K_X(E)$ であるから, $\neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E) \subseteq \neg K_X \neg K_X \neg K_X(E)$ が成り立つ. ■

4.3　Unawareness 演算子

本節でいよいよ我々は unawareness 演算子と awareness 演算子を定義する. X を認識している主体に対して, まず unawareness 演算子は $U_X(E) = \neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E)$ と定義され, Awareness 演算子は $A_X(E) = \neg U_X(E) = K_X(E) \cup K_X \neg K_X(E)$ と定義される. Example 3 を例にとったとき, $E_1 = \{\omega_2\}$ に対して, $\neg K_X(E_1) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$ であり, $\neg K_X \neg K_X(E_1) = \emptyset$ となるので, $U_X(E_1) = \emptyset$ となり, $A_X(E_1) = \{\omega_2, \omega_4\}$ となる. $E_2 = \{\omega_1, \omega_2\}$ のときは, $\neg K_X(E_2) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\neg K_X \neg K_X(E_2) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ となるので, $U_X(E_2) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $A_X(E_1) = \emptyset$ となる.

[8] 本稿では扱わないが、$\neg_X E = \Omega_X \setminus E$ とすることで議論を進める方法がある.

我々のモデルで先行研究が示してきた unawareness 演算子と awareness 演算子の性質を考察するためには，主体が基本命題の全てを認識しているのか否か，認識できない基本命題が存在する場合，対象となる事象がその主体を主観的状態空間の部分集合となっているか否かの 3 つの場合分けが必要となる．我々はその準備として以下の補題を証明する．Lemma 3 は Lemma 4-1 を証明するために必要な補題となる．

Lemma 3 (Heifetz et al. 2006)　If $E, F \subseteq \Omega_X$, then $K_X\big(E \cup K_X(F)\big) = K_X(E) \cup K_X(F)$.

Proof. 任意の $\omega \in K_X\big(E \cup K_X(F)\big)$ をとる．この時，$\Pi(\omega, X) \subseteq E \cup K_X(F)$ が成り立つ．これは $\Pi(\omega, X) \subseteq E$ または $\Pi(\omega, X) \subseteq K_X(F)$ が成り立つことを意味する．従って，K5 より $K_X(F) = K_X K_X(F)$ であるから，$K_X(E) \cup K_X K_X(F) = K_X(E) \cup K_X(F)$ であり，$\omega \in K_X(E) \cup K_X(F)$ が成立する．すなわち $K_X\big(E \cup K_X(F)\big) \subseteq K_X(E) \cup K_X(F)$．続いて任意の $\omega \in K_X(E) \cup K_X(F)$ をとる．K5 より $K_X(E) \cup K_X(F) = K_X(E) \cup K_X K_X(F)$．この時，$\Pi(\omega, X) \subseteq E$ または $\Pi(\omega, X) \subseteq K_X(F)$ が成立する．これは $\Pi(\omega, X) \subseteq E \cup K_X(F)$ を意味する．従って $\omega \in K_X\big(E \cup K_X(F)\big)$ が成り立つので，$K_X(E) \cup K_X(F) \subseteq K_X\big(E \cup K_X(F)\big)$．以上から $K_X\big(E \cup K_X(F)\big) = K_X(E) \cup K_X(F)$．■

Lemma 4　awareness 演算子は以下の性質を持つ．

1. (Triviality) If $X = P$, then $A_X(E) = \Omega$.
2. (Non-triviality) If $X \neq P$ and $E \subseteq \Omega_X$, then $A_X(E) = K_X(E)$.
3. (Non-triviality) If $X \neq P$ and $E \nsubseteq \Omega_X$, then $A_X(E) = \emptyset$.

Proof. (1) $X = P$ と仮定する．この時，$A_P(E) = K_P(E) \cup K_P \neg K_P(E)$．K5 より，$K_P(E) \cup K_P \neg K_P(E) = K_P K_P(E) \cup K_P \neg K_P(E)$．Lemma 3 より $K_P K_P(E) \cup K_P \neg K_P(E) = K_P\big(K_P(E) \cup \neg K_P(E)\big) = K_P(\Omega) = \Omega$. 従って $A_P(E) = \Omega$.

(2) $X \neq P$ かつ $E \subseteq \Omega_X$ と仮定する．この時, Proposition 2 より，$K_X(E) \subseteq \Omega_X$ であるから，$\neg K_X(E) \nsubseteq \Omega_X$ となる．従って，$K_X \neg K_X(E) = K_X(\emptyset) = \emptyset$ となる．この時，$A_X(E) = K_X(E) \cup K_X \neg K_X(E) = K_X(E)$.

(3) $X \neq P$ かつ $E \nsubseteq \Omega_X$ と仮定する．この時，知識演算子の定義より，$K_X(E) = \emptyset$ が成り立つ．この時，$\neg K_X(E) = \Omega$ であり，$K_X(\Omega) = \emptyset$ が成立する．従って，$A_X(E) = K_X(E) \cup K_X \neg K_X(E) = \emptyset$. ■

Proposition 5　$X = P$ の時, unawareness 演算子と awareness 演算子は以下の性質を満た

す.

① KU Introspection: $K_X U_X(E) = \emptyset$.

② AU Introspection: $U_X(E) = U_X U_X(E)$.

③ Weak Necessitation: $A_X(E) = K_X(\Omega_X)$.

④ Strong Plausibility: $U_X(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\neg K_X)^n(E)$.

⑤ Weak Negative Introspection: $\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$.

⑥ Symmetry: $A_X(\neg E) = A_X(E)$.

⑦ A-Conjunction: $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda)$.

⑧ AK-Self Reflection: $A_X K_X(E) = A_X(E)$.

⑨ AA-Self Reflection: $A_X A_X(E) = A_X(E)$.

⑩ A-Introspection: $K_X A_X(E) = A_X(E)$.

Proof. $X = P$ を仮定する. Lemma 4-1 より $A_X(E) = \Omega$. 従って, $U_X(E) = \emptyset$.

1) $K_X U_X(E) = K_X(\neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E)) = K_X \neg K_X(E) \cap K_X \neg K_X \neg K_X(E) \subseteq K_X \neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E) = \emptyset$.

2) Lemma 4-1 より, $A_X(E) = \Omega$ かつ $U_X(E) = \neg A_X(E) = \emptyset$ であるから, $A_X U_X(E) = A_X(\emptyset) = K_X(\emptyset) \cup K_X \neg K_X(\emptyset) = \emptyset \cup K_X(\Omega) = \Omega$. 従って, $A_X(E) = A_X U_X(E)$ であり, $U_X(E) = U_X U_X(E)$.

3) $X = P$ より, $K_X(\Omega) = \Omega$. Lemma 4 より $A_X(E) = \Omega$ であるから, $A_X(E) = K_X(\Omega)$.

4) Lemma 4 より, $U_X(E) = \neg A_X(E) = \emptyset$. Lemma 4 と Proposition 5-2 より, $U_X(E) = U_X U_X(E) = \emptyset$ である. $U_X U_X U_X(E) = U_X(\emptyset)$. この時, $A_X(\emptyset) = \Omega$ であるから, $U_X U_X U_X(E) = U_X(\emptyset) = \emptyset$. これが繰り返されるから, 従って $U_X(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\neg K_X)^n(E)$.

5) $A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E) \cup K_X \neg K_X \neg K_X(E) = K_X K_X \neg K_X(E) \cup K_X \neg K_X \neg K_X(E) = K_X(K_X \neg K_X(E) \cup \neg K_X \neg K_X(E)) = K_X(\Omega) = \Omega$. 従って, $\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = \neg K_X(E) \cap \Omega = \neg K_X(E)$. $X = P$ より, K6 から $\neg K_X(E) \subseteq K_X \neg K_X(E)$. さらに K4 より, $K_X \neg K_X(E) \subseteq \neg K_X(E)$. 従って, $\neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$ が成立するから, $\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$.

6) 任意の $E \subseteq \Omega$ に対して, $A_X(E) = \Omega$ であるから, $A_X(\neg E) = \Omega$. 従って $A_X(\neg E) = A_X(E)$.

7) 任意の $E \subseteq \Omega$ に対して, $A_X(E) = \Omega$ であるから, $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \Omega$ かつ任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_X(E_\lambda) = \Omega$ であるから, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda) = \Omega$. 従って, $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda)$.

8) 任意の $E \subseteq \Omega$ に対して, $A_X(E) = \Omega$ であるから, $A_X K_X(E) = \Omega$. 従って, $A_X K_X(E) = A_X(E)$.

9) 任意の $E \subseteq \Omega$ に対して，$A_X(E) = \Omega$ であるから，$A_X A_X(E) = \Omega$．従って，$A_X A_X(E) = A_X(E)$.

10) 任意の $E \subseteq \Omega$ に対して，$A_X(E) = \Omega$ であるから，$K_X A_X(E) = K_X(\Omega)$．$X = P$ より，K1 から $K_X(\Omega) = \Omega$. $K_X A_X(E) = A_X(E)$. ■

Proposition 6 $X \neq P$ かつ任意の $E \subseteq \Omega$ に対して，$E \subseteq \Omega_X$ の時, unawareness 演算子と awareness 演算子は以下の性質を満たす.

① KU Introspection: $K_X U_X(E) = \emptyset$.

② AU Introspection: $U_X(E) \subseteq U_X U_X(E)$.

③ Weak Necessitation: $A_X(E) \subseteq K_X(\Omega_X)$.

④ Strong Plausibility: $U_X(E) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(\neg K_X)^n\,(E)$.

⑤ Weak Negative Introspection: $\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$.

⑥ Reverse Symmetry: $A_X(\neg E) \subseteq A_X(E)$.

⑦ A-Conjunction: $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda)$.

⑧ AK-Self Reflection: $A_X K_X(E) = A_X(E)$.

⑨ AA-Self Reflection: $A_X A_X(E) = A_X(E)$.

⑩ A-Introspection: $K_X A_X(E) = A_X(E)$.

Proof. $X \neq P$ かつ任意の $E \subseteq \Omega$ に対して，$E \subseteq \Omega_X$ が成立すると仮定する．Lemma 4-2 より $A_X(E) = K_X(E)$．従って，$U_X(E) = \neg K_X(E)$.

1) $A_X(E) = K_X(E)$ より，$U_X(E) = \neg K_X(E)$．Proposition 2 より，$K_X(E) \subseteq \Omega_X$ であるから，$\neg K_X(E) \nsubseteq \Omega_X$．従って $K_X\big(\neg K_X(E)\big) = \emptyset$.

2) $U_X(E) = \neg K_X(E) \subseteq \Omega$. $U_X U_X(E) = \neg K_X U_X(E)$. KU Introspection より，$K_X U_X(E) = \emptyset$ であるから，$\neg K_X U_X(E) = \Omega$. 従って $U_X(E) \subseteq U_X U_X(E)$.

3) Lemma 4-2 より $A_X(E) = K_X(E)$, Remark 5 より $K_X(\Omega_X) = \Omega_X$ より，$A_X(E) \subseteq K_X(\Omega_X)$.

4) Proposition 6-2 より，$U_X U_X(E) = \neg K_X U_X(E) = \Omega$．$U_X U_X U_X(E) = U_X \neg K_X U_X(E) = U_X(\Omega) = \neg K_X(\Omega)$．知識演算子の定義より，$K_X(\Omega) = \emptyset$ より，$U_X(\Omega) = \Omega$．これが繰り返されるから，$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\neg K_X)^n\,(E) = \Omega$. 従って，$U_X(E) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(\neg K_X)^n\,(E)$.

5) Lemma 4-2 より $A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$．K4 より $K_X(E) \subseteq E \subseteq \Omega_X$ であるから，$\neg K_X(E) \nsubseteq \Omega_X$．従って，$K_X \neg K_X(E) = \emptyset$．従って，$\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = \neg K_X(E) \cap \emptyset = \emptyset = K_X \neg K_X(E)$.

6) $A_X(\neg E) = K_X(\neg E) \cup K_X \neg K_X(\neg E)$．$E \subseteq \Omega_X$ より $\neg E \nsubseteq \Omega_X$．従って，$K_X(\neg E) = \emptyset$．$\neg K_X(\neg E) = \Omega$ より $K_X \neg K_X(\neg E) = \emptyset$. 従って，$A_X(\neg E) = \emptyset$. Lemma 4-2 より $A_X(E) = K_X(E)$ だから $A_X(\neg E) \subseteq A_X(E)$.

7) 任意の $E \subseteq \Omega_X$ に対して，$A_X(E) = K_X(E)$ であるから，$A_X(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda) = K_X(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda)$ かつ任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_X(E_\lambda) = K_X(E_\lambda)$ であるから，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_X(E_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_X(E_\lambda)$. 従って, K3 より $A_X(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_X(E_\lambda)$.

8) 任意の $E \subseteq \Omega_X$ に対して，K4 より $K_X(E) \subseteq E$. 従って，$A_X K_X(E) = K_X K_X(E)$ より，$K_X K_X(E) = K_X(E)$. 従って，$A_X K_X(E) = A_X(E)$.

9) 任意の $E \subseteq \Omega_X$ に対して, K4 より $K_X(E) \subseteq E$. $A_X(E) = K_X(E)$ であるから，$A_X A_X(E) = A_X K_X(E) = K_X K_X(E) = K_X(E)$. 従って，$A_X A_X(E) = A_X(E)$.

10) 任意の $E \subseteq \Omega_X$ に対して，$A_X(E) = K_X(E)$ であるから，$K_X A_X(E) = K_X K_X(E) = K_X(E)$. 従って，$K_X A_X(E) = A_X(E)$. ■

Proposition 7 $X \neq P$ かつ任意の $E \subseteq \Omega$ に対して， $E \nsubseteq \Omega_X$ の時, unawareness 演算子と awareness 演算子は以下の性質を満たす.

① KU Introspection: $K_X U_X(E) = \emptyset$.

② AU Introspection: $U_X(E) = U_X U_X(E)$.

③ Weak Necessitation: $A_X(E) \subseteq K_X(\Omega_X)$.

④ Strong Plausibility: $U_X(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\neg K_X)^n (E)$.

⑤ Weak Negative Introspection: $\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$.

⑥ Reverse Symmetry: $A_X(\neg E) \supseteq A_X(E)$.

⑦ A-Conjunction: $A_X(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_X(E_\lambda)$.

⑧ AK-Self Reflection: $A_X K_X(E) = A_X(E)$.

⑨ AA-Self Reflection: $A_X A_X(E) = A_X(E)$.

⑩ A-Introspection: $K_X A_X(E) = A_X(E)$.

Proof. $X \neq P$ かつ任意の $E \subseteq \Omega$ に対して， $E \nsubseteq \Omega_X$ を仮定する. Lemma 4-3 より $A_X(E) = \emptyset$. 従って，$U_X(E) = \Omega$.

1) $K_X U_X(E) = K_X(\Omega) = \emptyset$.

2) $U_X U_X(E) = U_X(\Omega)$. $\Omega \nsubseteq \Omega_X$ は明らかだから，$U_X(\Omega) = \Omega$. 従って，$U_X U_X(E) = \Omega$ より $U_X(E) = U_X U_X(E)$.

3) Lemma 4-3 と Remark 5 より $A_X(E) = \emptyset \subseteq \Omega_X = K_X(\Omega_X)$.

4) 2) より，$U_X U_X U_X(E) = U_X(\Omega) = \Omega$. これを繰り返して，$U_X(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\neg K_X)^n (E)$.

5) $E \nsubseteq \Omega_X$ より $K_X(E) = \emptyset$ だから $\neg K_X(E) = \Omega$. $K_X \neg K_X(E) = K_X(\Omega) = \emptyset$. 従って，$A_X \neg K_X(E) = A_X(\Omega) = K_X(\Omega) \cup K_X \neg K_X(\Omega) = \emptyset$ だから. $\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$.

6) $A_X(E) = \emptyset$ だから $A_X(\neg E) \supseteq A_X(E)$.

7) 任意の $E \not\subseteq \Omega_X$ に対して，$A_X(E) = \emptyset$ であるから，$A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \emptyset$ かつ任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_X(E_\lambda) = \emptyset$ であるから，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda) = \emptyset$．従って，$A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda)$.
8) $K_X(E) = \emptyset$ だから，$A_X K_X(E) = A_X(\emptyset) = K_X(\emptyset) \cup K_X \neg K_X(\emptyset) = \emptyset \cup K_X(\Omega) = \emptyset$．従って $A_X K_X(E) = A_X(E)$.
9) $A_X A_X(E) = A_X(\emptyset) = \emptyset$. 従って，$A_X A_X(E) = A_X(E)$.
10) $K_X A_X(E) = K_X(\emptyset) = \emptyset$. ■

Remark 6 $X \neq P$ と仮定する．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $E_\lambda \subseteq \Omega_X$，任意の $\delta \in \Delta$ に対して $E_\delta \not\subseteq \Omega_X$ とする．この時，$A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \bigcap_{\delta \in \Delta} E_\delta) \supseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda) \bigcap_{\delta \in \Delta} A_X(E_\delta)$.

Proof. 任意の 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $E_\lambda \subseteq \Omega_X$ であるから，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \subseteq \Omega_X$．従って，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \bigcap_{\delta \in \Delta} E_\delta \subseteq \Omega_X$ であるから，Lemma 4-2 より $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \bigcap_{\delta \in \Delta} E_\delta) = K_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \bigcap_{\delta \in \Delta} E_\delta)$．続いて任意の $\delta \in \Delta$ に対して $E_\delta \not\subseteq \Omega_X$ であるから，任意の $\delta \in \Delta$ に対して $A_X(E_\delta) = \emptyset$. 従って，$\bigcap_{\delta \in \Delta} A_X(E_\delta)$ であるから，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda) \bigcap_{\delta \in \Delta} A_X(E_\delta)$．以上より $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \bigcap_{\delta \in \Delta} E_\delta) \supseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda) \bigcap_{\delta \in \Delta} A_X(E_\delta)$. ■

KU Introspection, AU Introspection, Weak Necessitation, Strong Plusibility は Dekel et al.（1998）によって. Symmetry, A-Conjunction, AK=Self Reflection, AA-Self Reflection は Modica and Rustichini（1999）によって，Weak Negative Introspection, Symmetry, A-Conjunction, AK-Self Reflection, AA-Self Reflection は Halpern（2001）によって，A-Introspection は Heifetz et al. (2006) によってすでに提案されている.

興味深いことに我々のモデルは先行研究と異なり，全ての性質で等号が成立するわけではない．$X \neq P$ かつ $E \subseteq \Omega_X$ の時は，AU Introspection, Weak Necessitation, Strong Plausibility, で必ずしも等号が成立するとは限らない.また $X \neq P$ かつ $E \not\subseteq \Omega_X$ の場合でも, Weak Necessitation,で等号が成り立たないかもしれない．また Remark 6 が示す通り, A-Conjunction は任意の事象が $E \subseteq \Omega_X$ または $E \not\subseteq \Omega_X$ のどちらか一方だけが成立している場合において成り立つ．そうでない時には左辺が空集合にならない限り，右辺が空集合となるため成り立たない.

さらに $X \neq P$ の時，任意の $E \subseteq \Omega$ に対して Symmetry が成立しない点は強調に値する. 先行研究では（e.g., Heifetz et al. 2006; Li 2009), awareness 演算子, unawareness 演算子は Symmetry が成立しているとの結果を導き出している．Fukuda（2020）では高階の unawareness については Symmetry が成立しないかもしれないとの結果を導き出したも

のの，高階でない場合は Symmetry が成立するとの結論を導き出している．様相論理を用いた研究では，Modica and Rusitichini (1994; 1999), Halpern (2001), Heifetz et al. (2008) などが Symmetry を公理として仮定して unawareness を議論している．これらの先行研究とは対照的に，我々は $X \neq P$ の時，高階を議論していないにも拘らず，Symmetry が成立しないことを示した．我々は Symmetry と Non-triviality が両立しない性質を Reverse Symmetry と名づける．Reverse Symmetry は $E \subseteq \Omega_X$ か $E \nsubseteq \Omega_X$ かで包含関係が逆転する．

Reverse Symmetry は非常に重要な性質であるように思われる．ある事象とその否定事象は $X \neq P$ の時，少なくとも一方が必ず主体が認識している主観的状態空間の部分集合にはならない．これは主体が認識している事象と主体が認識できないような否定事象とを同じ土台で議論するべきではないことを示唆しているように思われる．

また様相論理との関係で重要な点を示唆する．Modica and Rustichini (1994) は Symmetry を仮定した時，S4 と S5 が同値になることを示した，e.g., S4+Symmetry=S5．その後の研究では Symmetry を仮定することが一般的となる（e.g., Modica and Rustichini 1999, Halpern 2001, Heifetz et al. 2008）．対照的に我々のモデルからは S4 with Symmetry は trivial なものとなってしまう．Reverse Symmetry は unawareness を議論するときに S5 の上で議論するべきではないことを示唆しているように思われる．今後の研究では S4+Reverse Symmetry について議論を進める必要があるだろう．

我々の研究結果は幾つかの点で先行研究とは異なるものではあるけれども，意味のある含意を持っているように思われる．

本サブセクションの最後に，Galanis (2013) が提案した Awareness leads to Knowledge と constructive Aumann structure との関係性について若干の考察を行う．Galanis (2013) は Awareness leads to Knowledge を次のように定義した：任意の $X, Y \subseteq P$（$Y \subseteq X$）と $E \subseteq \Omega$ に対して，$K_Y(E_Y) \subseteq \left(K_X(E_Y)\right)_Y \cap A_Y(E_Y)$．彼は Projections Preserve Knowledge を仮定しない場合，逆の包含関係が成り立たないかもしれないことを指摘した．しかし本稿のモデルでは，Projections Preserve Knowledge が自動的に成り立っている．従って，逆の包含関係もまた成立するのである．この点から我々のモデルは Galanis (2013) のモデルと相性が悪いと言えるであろう．

Proposition 8　任意の $X, Y \subseteq P$（$Y \subseteq X$）と $E \subseteq \Omega$ に対して，$K_Y(E_Y) = \left(K_X(E_Y)\right)_Y \cap A_Y(E_Y)$.

Proof. $Y \subseteq X$ を満たす $X, Y \subseteq P$ と $E \subseteq \Omega$ を与える．この時，$K_Y(E_Y) \subseteq A_Y(E_Y)$ は明らかである．K4 より，$K_X(E_Y) \subseteq E_Y$ であるから，$K_X(E_Y) \subseteq \Omega_Y$．ここで，$\omega \in \Omega \setminus E_Y$ を与える．この時，任意の $\omega' \in \Omega$ に対して，$\omega \notin \Pi(\omega', X)$ かつ $\omega \notin \Pi(\omega', Y)$．これは $\omega \notin K_X(E_Y)$ かつ $\omega \notin K_Y(E_Y)$ を意味する．すなわち，$\omega \in \neg K_X(E_Y)$ かつ $\omega \in \neg K_Y(E_Y)$．ω は任意である

から，$\neg K_X(E_Y) = \neg K_Y(E_Y)$．従って，$K_X(E_Y) = K_Y(E_Y)$．$E_Y \subseteq \Omega_Y$ であるので，$\left(K_X(E_Y)\right)_Y = K_X(E_Y)$．以上より，$K_Y(E_Y) = K_Y(E_Y) \cap A_Y(E_Y) = K_X(E_Y) \cap A_Y(E_Y) = \left(K_X(E_Y)\right)_Y \cap A_Y(E_Y)$．■

4-4　標準的な状態空間モデルとの関係性

我々のモデルは $X = P$ の時，標準的な Aumann structure と同様に unawareness が trivial なものとなる．実際，以下のように Dekel et al. (1998) の主要定理が一般化される．

Theorem 1 (Generalized DLR's Main Theorem)　任意の constructive Aumann structure において以下の性質は同値である．

1. $X = P$.
2. 全ての $E \subseteq \Omega$ に対して，$U_X(E) = \emptyset$.
3. 全ての $E, F \subseteq \Omega$ に対して，$E \subseteq F$ ならば，$U_X(E) \subseteq \neg K_X(F)$.

Proof. $(1 \Rightarrow 2)$ Lemma 4-1 より明らか.

$(2 \Rightarrow 3)$ 全ての $E \subseteq \Omega$ に対して，$U_X(E) = \emptyset$ であるから，任意の $F \subseteq \Omega$ に対して，$\emptyset = U_X(E) \subseteq \neg K_X(F)$.

$(3 \Rightarrow 1)$ 全ての $E, F \subseteq \Omega$ に対して，$E \subseteq F$ ならば，$U_X(E) \subseteq \neg K_X(F)$ とする．ここで $X \neq P$ を仮定し，$E = \emptyset, \emptyset \neq F \subseteq \Omega_X$ を取り出す．この時，$\neg K_X(\emptyset) = \Omega$ かつ $K_X(\Omega) = \emptyset$ であるから，$U_X(\emptyset) = \neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E) = \Omega \cap \neg K_X(\Omega) = \Omega \cap \left(\Omega \setminus K_X(\Omega)\right) = \Omega$．$\neg K_X(F) \subsetneq \Omega$ は明らかなので，$\neg K_X(F) \subsetneq U_X(\emptyset)$ が成立する．これは明らかに矛盾する．従って，$X = P$．■

Dekel et al. (1998) では，unawareness 演算子が Plausibility, AU Introspection, KU Introspection を満たしているとき，知識演算子が Necessitation を満たしている場合，unawareness は trivial なものとなってしまうことを証明した．また Monotonicity が成立している場合，主体の unawareness は全てに対する無知を導いてしまうことも証明した．我々のモデルでは，unawareness 演算子を Plausibility と定義した上で，$X = P$ の時，知識演算子は Necessitation と Monotonicity が自動的に成立し，unawareness 演算子も AU Introspection と KU Introspection が自動的に成立してしまう．従って，$X = P$ の時には彼らの主要定理が成立してしまうことを意味する．同時に彼らの主要定理が成立している時，我々のモデルにおいて，$X = P$ が成立する．

Dekel et al. (1998) の延長で Negative Introspection と AU Introspection との関係を論じた Chen et al. (2012) の議論についても，我々のモデルで一般化することができる. Chen et al. (2012) は Plausibility, Necessitation が成立しているとき, Negative Introspection が AU Introspection と KU Introspection と同値になることを示しており，さらに Monotonicity と Truth Axiom が成立している時，Negative Introspection と AU Introspection が同値になることを示している．我々のモデルでは，$X = P$ の時，Negative Introspection と AU Introspection が同時に成立しているので，この同値性が保たれている．また，Chen et al. (2012) は Modica and Rustichini (1994) が示した Negative Introspection と Symmetry との同値性も引用している．従って, Chen et al. (2012) の研究は以下のように一般化することができる.

Theorem 2 (Generalized CEL's Main Theorem) 任意の constructive Aumann structure において以下は同値である.

1. $X = P$.
2. Negative Introspection if and only if AU Introspection if and only if Symmetry.

Proof. ($1 \Longrightarrow 2$) $X = P$ の時, Proposition 3 より, Negative Introspection が成立する．また, Proposition 5 より, AU Introspection と Symmetry が成立する.
($2 \Longrightarrow 1$) Negative Introspection と AU Introspection と Symmetry が同値であると仮定する．ここで $X \neq P$ を仮定する．この時, Proposition 3 より Negative Introspection は成立せず，Proposition 6 と Proposition 7 より Symmetry が成立しない．しかしながら，Proposition 6 と Proposition 7 より AU Introspection が成立している．これは 3 つの性質が同値であることに反する．従って、 $X = P$. ■

最後に Fukuda (2020) との関係性について考察しよう. Fukuda (2020) は標準的な状態空間モデルであっても non-trivial unawareness を議論することが可能であることを示している．彼は Necessitation と AU Introspection がトレードオフとなっていることを論じ, Necessitation が成立しているところでは AU Introspection が成立いなくなるようにモデル化すれば non-trivial unawareness を議論することが可能となることを示した．この時, 彼は AU Introspection に代わる性質として Reverse AU Introspection ($U_X(E) \supseteq U_X U_X(E)$) を提案している．彼の議論は次のことを示している．一つは non-trivial unawareness を議論するにあたって AU Introspection は必要な性質ではないということ，そしてもう一つは AU Introspection が成立しないところでは awareness of unawareness を表現することができるかもしれないということだ.

対照的に，我々のモデルでは等号条件が成り立たない場合の Reverse AU Introspection は成立しない．我々のモデルの中では AU Introspection が自動的に導かれてしまう．これは可能性対応の定義と知識演算子の定義に依存した結果であると考えられる．Fukuda (2020) と同様の議論を行うためには，可能性対応と知識演算子の定義について議論することが必要であろう．この点は今後の研究課題となる．

V　Concluding Remarks

本研究は non-trivial unawareness を Aumann structure で議論するためのフレームワークの一つを提案した．我々の constructive Aumann structure は Heifetz et al. (2006) や Li (2009) と異なり，互いに素な状態空間の集合族を必要としない．しかしながら，標準的な状態空間モデルと異なり, unawareness structure の多属性の要素は引き継がれている．さらに我々の状態空間における各状態は他の状態との関係の中で性質が変わってくる．主体が認識している基本命題が何であるのかによって，各状態に対して主体の解釈が変わってくる．圏論では射が最初に定義され，射によって結ばれた関係の中で圏の特徴が決められる．我々のモデルも同様に各状態が他の状態との関係の中で特徴が決められている．このような特徴を持つ状態空間モデルは恐らく本稿が初めてモデル化している．状態空間における圏論的アプローチは今後の研究において新しい知見を与えるかもしれない．

我々のモデルは単一主体モデルであり，高階認識については考察から外している．しかしながら，我々の結論は先行研究とは異なる結果を導き出した．Proposition 6, Proposition 7, Remark 6 が示した通り, unawareness 演算子はいくつかの性質について等号が成り立たないかもしれない．また, Symmetry は主体が全ての状態空間を認識していない場合，成立しない．これらの特徴は我々のモデル特有のものである．しかしながら同時に, constructive state space は HMS-state space や Li-state space と同値性を持ち，また我々は Dekel et al. (1998) や Chen et al. (2012) が示した結論を constructive Aumann structure の中で一般化した．

本稿は単一主体に限定した．しかし相互作用が生じる状況においては非対称な awareness が存在し，それが意思決定に影響を与えることがありうる. Aumann (1976) の事後確率一致定理, Milgrom and Stokey (1982) の no-trade theorem, Rubinstein (1989) の E-mail ゲームなど共通知識が絡む問題を我々のモデルの中でどのように議論できるのかは重要な関心事項となる. No-trade theorem については Geanakoplos (1989) が非分割状態空間モデルで, Heifetz et al. (2013), Galanis (2018) などは unawareness structure で議論している．幾つかの性質について先行研究とは異なる awareness 演算子の特徴を導いたからこそ，果たして同様の結果を導くことができるのかどうかは今後の研究課題として位置付けられる．

また，我々のモデルをベイジアンゲームに導入することも可能となる．Bayesian games with unawareness を研究したものとして Meier and Schipper (2014) が挙げられる．彼らは unawareness structure の枠組みで状態空間を規定しているが，本稿は HMS-state space から constructive state space へと置き換えが可能であることを示したので，状態空間を我々の枠組みで規定した Bayesian games with unawareness を議論することが可能となるだろう．近年，Perea (2018) が Harsanyi (1967/68) のモデルに近い games with unawareness のモデルを提案している．彼のタイプ空間は Meier and Schipper (2014) のタイプ空間の部分集合を成しているように思われる．これは我々の状態空間が HMS-state space や Li-state space の部分集合となっているのと同様であるように見える．我々のモデルと Perea モデルとをつなげることによって，Harsanyi model with lattices を定式化できるかもしれない．この時, games with unawareness は標準的な不完備情報ゲームの延長線に位置付けることができる．

Acknowledge

本研究を応援してくださった中央大学瀧澤弘和教授に感謝を述べたい．教授からは unawareness モデルと標準的なモデルとの断絶が標準的なゲーム理論家にとって unawareness をわかりづらいものにしていることを度々指摘してくださった．本研究のプライベートなバックグラウンドは教授からいただいたコメントが大きい．ただし，本稿での内容については著者のみが責任を負うものである．

Reference

Aumann, R. (1976), “Agreeing to disagree”, *The Annals of Statistics*, 4: 1236-1239.

Chen, Y-C., J.C. Ely and X. Luo (2012), “Note on unawareness: Negative introspection versus. AU introspection (and KU introspection)”, *International Journal of Game Theory*, 41 (2): 325-329.

Dekel, E., B.L. Lipman and A. Rustichini (1998), “Standard state-space models preclude unawareness”, *Econometrica*, 66 (1): 159-173.

Fagin, R. and J.Y. Halpern (1998), “Belief, awareness and limited reasoning”, *Artificial Intelligence*, 34: 39-76.

Fukuda, S. (2020), “Unawareness without AU introspection”, *Journal of Mathematical Economics*, forthcoming.

Galanis, S. (2013), “Unawareness of theorems”, *Economic Theory*, 52: 41-73.

—— (2018), “Speculation under unawareness”, *Games and Economic Behavior*, 109: 598-615.

Geanakoplos, J. (1989), “Game theory without prtitions, and applications to speculation and consensus", Cowles Foundation Discussion Paper No. 914.

Halpern, J. Y. (2001), "Alternative Semantics for Unawareness", *Games and Economic Behavior*, 37: 321-339.

Harsanyi, J. (1967/68), "Games with incomplete information played Bayesian players, Part I-III", *Management Science*, 14: 159-182, 320-334, 486-502.

Heifetz, A., M. Meier and B.C. Schipper (2006), "Interactive unawareness", *Journal of Economic Theory*, 130: 78-94.

──(2008), "A Canonical Model for Interactive Unawareness", *Games and Economic Behavior*, 62 (1): 304-324.

──(2013), "Unawareness, beliefs, and speculative trade", *Games and Economic Behavior*, 77 (1): 100-121.

Heinsalu, S. (2012), "Equivalence of the information structure with unawareness. to Logic of Awareness", *Journal of Economic Theory*, 147: 2453-2468.

Meier, M. and B.C. Schipper (2014), "Bayesian games with unawareness and unawareness perfection", *Economic Theory*, 56 (2): 219-249.

Milgrom, P. and N. Stokey (1982), "Information, trade, and common knowledge", *Journal of Economic Theory*, 26: 17-27.

Modica, S. and A. Rustichini (1994), "Awareness and Partitional Information Structures", Theory and Decision, 37 (1): 107-124.

Perea, A. (2018), "Common Belief in Rationality in Games with Unawareness", Maastricht University.

Rubinstein, A. (1989), "The electronic mail game: Strategic behavior under 'almost common nowledge'", *American Economic Review*, 79: 385-391.

Schipper, B. C. (2014), "Unawareness – A Gentle Introduction to both the Literature and the Special Issue", *Mathematical Social Sciences*, 70: 1-9.

──(2015), "Awareness", in van Ditmarsch, H., J. Y. Halpern, W. van der Hoek, B. P. Kooi ed., *Handbook of Epistemic Logic*, College Publications: pp. 77-146.