Navigator

理工学部数学科／幾何学研究室
幾何学、位相幾何学

髙倉 樹 教授

【プロフィール】 髙倉 樹（たかくら たつる）▷1964 年富山県生まれ。1987 年東京大学理学部卒業。1989 年東京大学大学院理学系研究科修士課程修了。1994 年東京大学大学院数理科学研究科博士課程修了。博士（数理科学）。同年、福岡大学理学部助手、1997 年より中央大学理工学部専任講師、2001 年に助教授、2007 年に准教授を経て 2014 年より現職。

多様な数式によるアプローチを駆使して、この世にない未知の図形を発見し、その姿を視界に捉える挑戦を繰り返していく。

髙倉先生が様々な数式のアプローチを通して目指しているゴールは、現実の世界には存在せず、想像すらできない図形を見ることです。計算して得られた「図形」は、4 次元よりさらに高次元になることが多いため、もちろん目には見えません。しかし先生は、さらに数式を使って、その図形の美しさをイメージしていくのです。1 つのピースを発端に、予測もつかない図形を見るまでのプロセスを追って、難しい数学用語を理解しやすい言葉に直していただきながら、未知なる数式の世界へ旅してみましょう。それは、数学の好き嫌いに関わらず興味深いはずです。

基本的なピースから まだ見ぬ図形の研究がスタート

まだ見ぬ図形を見出すための第一ステップは、「基本的なピース」です。

「『基本的なピース』というのは、物質で言うと素粒子（クオークやレプトンなど、物質を構成する最小単位）のようなものです。私が求める図形は、この基本的なピースと呼ぶ図形に対して、ある「手続き」を加えることで生まれます。いわば素粒子を組み合わせて複雑な物質を作るようなものでしょうか」

この「手続き」とは、どんなプロセスなのだろうか。

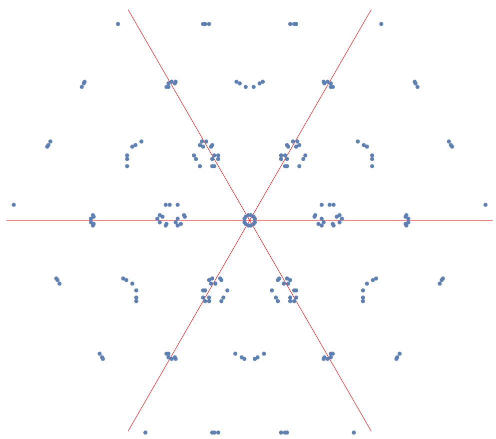
「図形同士を掛け算する『積をとる』といわれる計算や、同様に図形の割り算のような意味合いの計算を指します。この場合に、掛け算はどんな図形でもできますが、割り算は『群』が作用する状況で可能になります。この群は、図形の対称性の度合いと説明できます。例えば球体はどちらから見ても同じ形に見えるので『対称性が高い』と言うことができます。研究の出発点となる基本的なピースも、この群によって定められた純粋な図形です」

コーヒーカップとドーナツが 同じ形と考えるトポロジー

「トポロジー」という数学用語があります。髙倉先生の専門でもある「位相幾何学」と訳されるこの考え方を使って先生は、「手続き」を経て得られた図形の形を調べ、その形をイメージしていくのです。

「ある図形を調べて特徴づけるということは、他の図形との違いを際立たせることでもあります。トポロジーは、違いを見分けるのに有効な発想です。多少へこんだり歪んだりしていても円は円と捉え、そこに見られる違いを的確に捉えていくのです。

トポロジーの考え方を示すのによく使われるのが、取手のついたコーヒーカップとドーナツです。一見、違う形にしか思えませんが、穴のあいた取手が一つ付いたコーヒーカップを少しずつ連続的に変形させてカップの部分がなくなると、ドーナツと同じような形になります。この場合、この 2 つは同じものとみなされます。このように、少しズラして変形しても変わらない性質を調べるのがトポロジーで、取手が 2 つ付いたコーヒーカップでは、ドーナツとの間に違いが生じてきます」



▲最終的には二次元球面に対応する「基本的なピース」に、ある数式を経た結果をプロットしたデータ。まだ実際の図形はイメージしにくい。

まだ見たことのない図形が見える瞬間を目指して

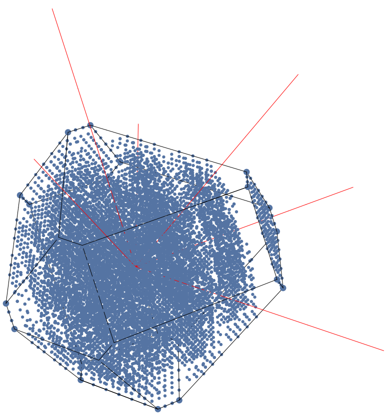
「手続き」を経て現れた数式は、ある図形を示していますが、やはり数式であることに変わりはなく、それがどんな形をしているかを見抜くことはできません。そこで登場するのが「組合せ論」です。

「『手続き』を経て得られた図形も何らかの形の集合なのですが、それをすぐに見ることはできません。それを見るためには、先に述べた図形レベルの手続きに加え、代数的レベルでの手続きが必要になります。そこで使われる一つの方法が『組合せ論』です。組合せ論の発想方法はMRIやCTスキャンと似ている部分もあります。これらは、いったん全体（人体）をバラバラに断層化し、必要な箇所の画像を治療に役立てますが、私の研究も同様に、組合せ論を通じてある条件を満たす数式の集まりを分析して必要な情報を抽出します。ただ、抽出した情報を総合して全体像をつかむのにまた時間がかかります。この方法がうまくいく範囲は限られているのですが、現在はその範囲すら明確ではありません」

全体像をつかんだ後で、それを目に見える図形として再現できるのは極めてまれなケースなのだとか。まさに想像以上に成功へのハードルが高い研究です。

「何をもって図形が分かったとするかは、研究者の立場によっても違い、調べ方のレベルも様々です。トポロジーで少し動かしても変わらないという性質が分かっても、やはり形そのものが知りたくなります。そこでさらに細かい情報を知ろうとすると、次の手続きが必要になります。それでも『こういう図形が組み合わされてできている』という言い方ができるレベルが大半です。

『図形が見える』というレベルに到達したことを表す一つの例が、数学者たちの間で認知された高次元の図形と関連させて立証できるケースです。それができれば、その図形に関し多くの人たちと共通のイメージをもつことができます」



▲組合せ論を経たデータ。ここからさらに高次元に存在する図形をイメージしていく。

共有できる新たな図形のモデル それこそが研究のゴール

髙倉先生は、自らの研究室について次のように語ります。

「研究の対象は図形なのですが、それを扱う過程で代数・幾何・解析という数学の諸分野が交錯する点が面白さだと思っています。また、もとの図形とは違う多面体を扱うことになるなど、予想がつかないところも魅力ですね。様々なアプローチを駆使して目に見えない図形を調べていく過程が非常に興味深いです」

研究室で取り組むテーマにも難解な名称が並びますが、これまでの先生のお話を踏まえると、その概要がつかめます。例えばその一つが「代数的トポロジー」というテーマ。

「図形の特徴を的確に捉えてその違いを判別するための手法として、トポロジーに関する非常に重要な内容をもったデータ（位相不変量）の典型である「ホモロジー論」を学びます」

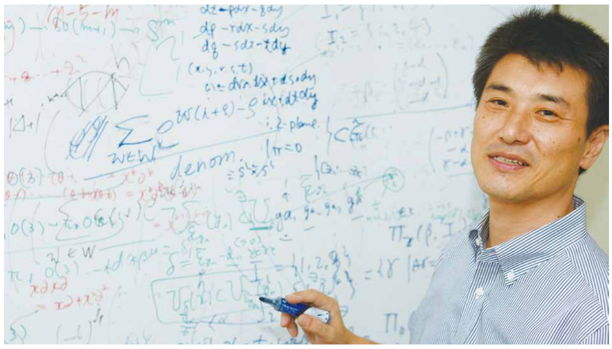
まさに先生の研究において、図形を調べる過程で重要な役割を担うものだと分かります。

さて、「受験生へのメッセージ」からも分かる通り、髙倉先生はより難解な問題に挑戦する姿勢を重視しています。

「高次元になると難易度は上がりますが、いきなり上げてしまうと複雑になり過ぎて手に負えなくなります。また、基本的なピースのパラメータ（媒介変数）によっても難易度は変化します。例えば二次元球面の場合、半径の長さがパラメータになりますが、現在は、これらを変えることで難易度がどこまで上がるかさえ予測がつかない状況なのです。難易度を上げつつ可能性のある全てを調べられればパーフェクトですが、それは現在の研究とは別の段階を踏む必要があります。

数学には『素性がいい』という表現があります。図形でありながら、幾何学とは関係のない代数や体積などが自然に関わる奥深さを指しますが、『キレイな図形』と言い換えることもできます。それが、数学者の間で共有できる図形のモデルにまで到達することが、この研究の最大にゴールと言えるでしょう。私にとっては、そのゴールを目指すことが大きなモチベーションになっています」

ある意味リアルな存在の基本的なピースから生まれた図形なのに、その実態が分からない。「だからこそ調べる価値がある」と語る髙倉先生の前には常に壁があり、見えないゴールがある。それは研究の神髄と言えるのではないでしょうか。



▲研究室の卒業生には数学の教師になる学生が多い。
髙倉先生の研究室で、数学の楽しさを知った先生が生まれる。

Message ～受験生に向けて～

計算してすぐ解ける問題より、もう少しブレークスルーが必要になるような難しいと感じられる問題をじっくり考える機会を増やしてみてください。そうしたチャレンジがあれば、「解けた！」「分かった！」という瞬間の感動は一生ものです。成功体験を得ても、仮に失敗しても、考えることに楽しさが見つかるはずですし、いい思い出にもなると思います。最近の学生たちの反応を見ると、通り一遍の問題しか解いていないな、という印象を受けます。皆さんはぜひ、チャレンジしてみてください。

注：2015年取材当時