

スポーツ情報学部（仮称）一般選抜 理系型 サンプル問題

数 学

（試験時間 90 分）

（設問は 2 ページより始まる）

I 次の問題文の空欄に最も適する答えを解答群から選び、その記号を解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(50点)

ある検査装置では、3つの測定値である正の整数 a, b, c を入力として、状態の安定性を示す識別値

$$I = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + M^2 - m^2$$

を出力する。ここで、 M は a, b, c のうち最大のもの、 m は最小のものである。たとえば $a = b = c$ のとき、 $I = 0$ となる。識別値が200以上のとき、入力は異常値であると判断される。つまり、 I は測定値のばらつきと、最大値・最小値の差を同時に評価している。

3つの測定値が $a = 1, b = 2, c = 4$ のとき、識別値は $I = \boxed{\text{ア}}$ である。また、 $a = 1, b = 3$ として、 $I = \boxed{\text{ア}}$ となる c の値は $c = \boxed{\text{イ}}$ である。このように、同じ識別値を出力する測定値は複数存在することがある。

$a = 5, b = 10$ とする。このとき、

$$I = \begin{cases} (c - \boxed{\text{ウ}})^2 + \boxed{\text{エ}} & c \leq 5 \text{ のとき} \\ 2\left(c - \frac{\boxed{\text{オ}}}{2}\right)^2 + \frac{\boxed{\text{カ}}}{2} & 5 < c < 10 \text{ のとき} \\ 3\left(c - \boxed{\text{キ}}\right)^2 + \boxed{\text{ク}} & c \geq 10 \text{ のとき} \end{cases}$$

である。したがって、識別値の最小値は $I = \boxed{\text{ケ}}$ である。また、入力が異常値であると判断されるのは $c = 1$ のときと、 $c \geq \boxed{\text{コ}}$ のときである。

問題 I のア、ケの解答群

- (a) 0 (b) 21 (c) 27 (d) 29 (e) 35 (f) 49 (g) 57 (h) 61
(i) 73 (j) 84 (k) 91 (l) 96 (m) 103 (n) 113 (o) 117 (p) 131

問題 I のイ、コの解答群

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5 (f) 6 (g) 7 (h) 8
(i) 9 (j) 10 (k) 11 (l) 12 (m) 13 (n) 14

問題 I のウ～クの解答群

- (a) 5 (b) 10 (c) 15 (d) 20 (e) 25 (f) 30 (g) 35 (h) 40
(i) 45 (j) 50 (k) 75 (l) 100 (m) 125 (n) 150 (o) 175 (p) 200
(q) 225 (r) 250 (s) 275

(設問は次のページにつづく)

II 次の問題文の空欄に最も適する答えを解答群から選び、その記号を解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。また、必要であれば $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて計算せよ。(50点)

スポーツやゲームにおけるレーティングとは選手の強さを数値(レート)で表したものである。広く用いられている Elo レーティングでは、選手 A と選手 B のレートをそれぞれ R_A , R_B , レート差を $x = R_A - R_B$ として、選手 A の勝率の目安 p を

$$p = \frac{1}{1 + 10^{-\frac{x}{400}}} \cdots \cdots (*)$$

によって与える。(*)の右边を $f(x)$ とおくと、一般に $f(x) + f(-x) = \boxed{\text{ア}}$ が成り立つ。選手 B のレートが選手 A のレートより 400 高いとき、選手 A の勝率の目安は $p = \frac{1}{\boxed{\text{イ}}}$ である。 $f(x) = \frac{3}{4}$ となるようなレート差 x を x_0 とすると、おおよ

そ $x_0 = \boxed{\text{ウ}}$ となり、整数 n に対して $f(nx_0) = \frac{(\boxed{\text{エ}})^n}{(\boxed{\text{エ}})^n + 1}$ と表せる。また、 $f(nx_0) > 0.99$ となる最小の n は $\boxed{\text{オ}}$ である。

現在の A さんのレートは $R_A = 1500$ である。試合後の A さんのレート $\tilde{R}_A$ は、試合前のレート R_A から

$$\tilde{R}_A = \begin{cases} R_A + 20(1 - f(x)) & A \text{ さんが勝利したとき} \\ R_A - 20f(x) & A \text{ さんが敗北したとき} \end{cases}$$

という規則で更新される。このとき、レートが $1500 + x_0$ の相手と対戦後のレート $\tilde{R}_A$ は、勝利したとき $\tilde{R}_A = \boxed{\text{カ}}$, 敗北したとき $\tilde{R}_A = \boxed{\text{キ}}$ となる。また、相手のレートが $1500 - 2x_0$ のとき、勝利したときのレートは $\tilde{R}_A = \boxed{\text{ク}}$, 敗北したときのレートは $\tilde{R}_A = \boxed{\text{ケ}}$ となる。

勝利したときの $\tilde{R}_A$ を x の関数と考える。 $\tilde{R}_A$ の x についての導関数を $f(x)$ で表すと $\frac{d\tilde{R}_A}{dx} = -\frac{1}{20} \left\{ \boxed{\text{コ}} \right\}$ であり、 $\frac{d\tilde{R}_A}{dx}$ が最小になるのは $x = \boxed{\text{サ}}$ のときである。

問題 II のアの解答群

- (a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) 1 (f) $\frac{4}{3}$ (g) $\frac{3}{2}$ (h) 2

問題 II のイ, エ, オの解答群

- (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6 (f) 7 (g) 8 (h) 9
(i) 10 (j) 11 (k) 12 (l) 13

問題 II のウ, サの解答群

- (a) 0 (b) 85 (c) 101 (d) 123 (e) 141 (f) 177 (g) 191 (h) 207

問題 II のカ～ケの解答群

- (a) 1482 (b) 1484 (c) 1485 (d) 1487 (e) 1489 (f) 1491 (g) 1495 (h) 1498
(i) 1502 (j) 1505 (k) 1509 (l) 1511 (m) 1513 (n) 1515 (o) 1516 (p) 1518

問題 II のコの解答群

- | | |
|------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $f(x)$ | (b) $1 - f(x)$ |
| (c) $f(x)^2$ | (d) $f(x)(1 - f(x))$ |
| (e) $(\log 10)f(x)$ | (f) $(\log 10)(1 - f(x))$ |
| (g) $(\log 10)f(x)^2$ | (h) $(\log 10)f(x)(1 - f(x))$ |
| (i) $\frac{f(x)}{\log 10}$ | (j) $\frac{1 - f(x)}{\log 10}$ |
| (k) $\frac{f(x)^2}{\log 10}$ | (l) $\frac{f(x)(1 - f(x))}{\log 10}$ |

(設問は次のページにつづく)

III 次の問題文の空欄に最も適する答えを解答群から選び、その記号を解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(50点)

複素数平面において、単位円周上の3点 $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ を考える。また、三角形 ABC の重心を G とし、 G に対応する複素数を z_G , その偏角を θ_G とする。

まず、 $z_1 = 1$, $z_2 = i$ とする。 z_3 の偏角を θ とすると、

$$z_G = \frac{1}{3} \left\{ \left(\boxed{\text{ア}} \right) + \left(\boxed{\text{イ}} \right) i \right\}$$

である。したがって、 $|z_G|^2$ は

$$|z_G|^2 = \frac{3 + \boxed{\text{ウ}} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)}{9}$$

となる。これを用いて、 $|z_G|$ の取りうる値の範囲は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}}}{3} \leq |z_G| \leq \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}}}{3}$$

となる。

一般に、 z_1, z_2, z_3 を単位円周上の複素数とし、偏角をそれぞれ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とする。また、 n を正の整数として、 $A_n(z_1^n)$, $B_n(z_2^n)$, $C_n(z_3^n)$ の重心 $G^{(n)}$ に対応する複素数を $z_G^{(n)}$ とおく。さらに、 $C^{(n)} = \cos n(\theta_1 - \theta_2) + \cos n(\theta_2 - \theta_3) + \cos n(\theta_3 - \theta_1)$ とおく。このとき、

$$|z_G^{(n)}|^2 = \frac{\boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}} C^{(n)}}{9}$$

が成り立つ。したがって、 $C^{(n)}$ のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ク}} \leq C^{(n)} \leq \boxed{\text{ケ}}$ である。ここで、 ω を1の3乗根のうち1ではないものの1つとし、 $z_1 = 1$, $z_2 = \omega$, $z_3 = \omega^2$ とする。このとき、 $|z_G^{(1)}|^2 = \boxed{\text{コ}}$, $|z_G^{(2)}|^2 = \boxed{\text{サ}}$, $|z_G^{(3)}|^2 = \boxed{\text{シ}}$ である。

問題 III のア, イの解答群

- (a) $\cos \theta$ (b) $\sin \theta$ (c) $\cos^2 \theta$ (d) $\sin^2 \theta$
(e) $1 + \cos \theta$ (f) $1 + \sin \theta$ (g) $1 - \cos \theta$ (h) $1 - \sin \theta$

問題 III のウ, カ, キの解答群

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) $\sqrt{2}$ (f) $2\sqrt{2}$ (g) $3\sqrt{2}$ (h) $4\sqrt{2}$
(i) $\sqrt{3}$ (j) $2\sqrt{3}$ (k) $3\sqrt{3}$ (l) $4\sqrt{3}$ (m) $\sqrt{5}$ (n) $2\sqrt{5}$ (o) $3\sqrt{5}$ (p) $4\sqrt{5}$

問題 III のク, コの解答群

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5 (f) 6 (g) 7 (h) 8

問題 III のケ, コの解答群

- (a) -2 (b) $-\frac{3}{2}$ (c) -1 (d) $-\frac{1}{2}$ (e) 0 (f) $\frac{1}{2}$ (g) 1 (h) $\frac{3}{2}$
(i) 2 (j) $\frac{5}{2}$ (k) 3

問題 III のコ～シの解答群

- (a) 0 (b) $\frac{1}{9}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$ (f) $\frac{2}{3}$ (g) $\frac{3}{4}$ (h) 1

(設問は次のページにつづく)

IV 次の問題文の空欄に最も適する答えを解答群から選び、その記号を解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(50点)

$f(x) = x^{-\log x}$ ($x > 0$) とする。このとき、

$$f\left(\frac{e}{x}\right) = \boxed{\text{ア}} f(x) \quad \dots\dots (*)$$

が成り立つ。また、 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \boxed{\text{イ}} f(x)$$

と表せ、 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{ウ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとることがわかる。

次に、 $a > 0$ に対して

$$I(a) = \int_1^a (1 - 2 \log x) f(x) dx$$

とおく。置換積分により、 $I(a) = e^{\boxed{\text{オ}}} - 1$ が得られる。 $I(a)$ は $a = \boxed{\text{カ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{キ}}$ をとる。

$I(a)$ を変形し、 $f(a)$ を用いて表すと $I(a) = \boxed{\text{ク}}$ となる。 $(*)$ を用いることにより、 $I(\boxed{\text{ケ}}) = I(a)$ が成り立つことがわかる。したがって、 $0 < m < \boxed{\text{キ}}$ のとき $I(a) = m$ となる a の値は2つあり、それぞれ a_1, a_2 とすると、 $a_1 a_2 = \boxed{\text{コ}}$ である。

問題 IV のアの解答群

- (a) ex (b) $\frac{x}{e}$ (c) $\frac{x}{e^2}$ (d) $\frac{x^2}{e}$ (e) $\frac{e}{x}$ (f) $\frac{e^2}{x}$

問題 IV のイの解答群

- (a) $\frac{\log x}{x}$ (b) $-\frac{\log x}{x}$ (c) $-\frac{2\log x}{x}$ (d) $-\frac{\log x}{2x}$ (e) $\frac{\log x}{2x}$

問題 IV のウ, エ, カ, キ, コの解答群

- (a) 1 (b) e (c) $e - 1$ (d) $\frac{1}{e}$ (e) $e^{\frac{1}{2}}$ (f) $e^{\frac{1}{2}} - 1$
(g) $e^{-\frac{1}{2}}$ (h) $e^{-\frac{1}{2}} + 1$ (i) $e^{\frac{1}{4}}$ (j) $e^{\frac{1}{4}} - 1$ (k) $e^{\frac{1}{4}} + 1$ (l) $e^{-\frac{1}{4}} + 1$

問題 IV のオの解答群

- (a) $\log a$ (b) $-\log a$ (c) $(\log a)^2$
(d) $-(\log a)^2$ (e) $\log a + (\log a)^2$ (f) $\log a - (\log a)^2$
(g) $2\log a + (\log a)^2$ (h) $2\log a - (\log a)^2$

問題 IV のクの解答群

- (a) $f(a) + 1$ (b) $f(a) - 1$ (c) $ef(a) + 1$ (d) $ef(a) - 1$
(e) $af(a) + 1$ (f) $af(a) - 1$ (g) $a(f(a) + 1)$ (h) $ef(a) + e$

問題 IV のケの解答群

- (a) $\frac{1}{a}$ (b) $\frac{e}{a}$ (c) $\frac{e}{a^2}$ (d) $\frac{a}{e}$ (e) $\frac{a}{e^2}$ (f) $\frac{a^2}{e}$

(以下計算用紙)

解答上の注意

1. 分数形で解答する場合、それ以上約分できない形で答えてください。例えば、 $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ に $\frac{3}{4}$ と答えるところを $\frac{6}{8}$ のように答えた場合や、 $\frac{3x}{4}$ と答えるところを $\frac{6x}{8}$ のように答えた場合は**不正解**とします。

2. 根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。例えば、 $\boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを $2\sqrt{8}$ のように答えた場合や、 $4\sqrt{2x}$ と答えるところを $2\sqrt{8x}$ のように答えた場合は**不正解**とします。

3. 根号を含む分数形で解答する場合、例えば、

$$\frac{\boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}} \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

に $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを $\frac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\frac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のように答えた場合や、 $\frac{3x+2\sqrt{2y}}{2}$ と答えるところを $\frac{6x+4\sqrt{2y}}{4}$ や $\frac{6x+2\sqrt{8y}}{4}$ のように答えた場合は**不正解**とします。